ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESERCIZI PRESENTATI E SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Nozioni fondamentali. L'equazione della forma $F(x, y, y', ...y^n) = 0$ dove $y = y(x)$ è una funzione incognita, si chiama *equazione differenziale di ordine ennesimo*. Una funzione $\varphi(x)$ che trasforma in identità l'equazione differenziale, si chiama *soluzione* di questa equazione ed il suo grafico *curva integrale*. Se la soluzione è data in forma implicita $\Phi(x, y) = 0$, si dice al solito che è un *integrale*.

L'integrale $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$ dell'equazione differenziale contenente n costanti arbitrarie indipendenti $C_1, ...C_n$ ed equivalente all'equazione, si chiama *integrale generale*. Assegnando alle costanti valori definiti, si ottiene un *integrale particolare*.

Esercizi

Esercizio 1. Precisare se la funzione $y = 5x^2$ è soluzione dell'equazione differenziale $xy' = 2y$

Soluzione. Calcolo la derivata di y: $y' = 10x$ e sostituisco $10x^2 = 10x^2$. La risposta è positiva.

Esercizio 2. Precisare se la funzione $y = \frac{1}{x}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' = x^2 + y^2$

Soluzione. Calcolo la derivata di y: $y' = -\frac{1}{x^2}$ e sostituisco $-\frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$. La risposta è negativa.

Esercizio 3. Precisare se la funzione $y = \frac{C^2-x^2}{2x}$ è soluzione dell'equazione differenziale $(x + y)\,dx = +xdy = 0$

Soluzione. Calcolo la derivata di y: $y' = -\frac{x^2+C^2}{2x^2}$ e sostituisco riscrivendo l'equazione come $xy' + x + y = 0$ (ricordando che $y' = \frac{dy}{dx}$)

$$-x\left(\frac{x^2+C^2}{2x^2}\right) + x + \frac{C^2-x^2}{2x} = 0 \qquad 0 = 0$$

risposta positiva.

Esercizio 4. Precisare se la funzione $y = 3\sin x - 4\cos x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$

Soluzione. Calcoliamo le derivate prima e seconda di y: $y' = 3\cos x + 4\sin x$ e $y'' = -3\sin x + 4\cos x$; sostituiamo nell'equazione $-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x = 0$, da cui $0 = 0$, risposta positiva.

Esercizio 5. Precisare se la funzione $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ è soluzione dell'equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Soluzione. Come prima, $\frac{dx}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1\omega^2\cos\omega t - C_2\omega^2\sin\omega t$; sostituiamo

$$-C_1\omega^2\cos\omega t - C_2\omega^2\sin\omega t + \omega^2\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right) = 0$$

risposta positiva.

Esercizio 6. Determinare il valore di k affinché la funzione $y(x) = e^{-2x} + k$, soluzione generale, sia soluzione particolare dell'equazione differenziale $y' + 2y = 1$.

Soluzione. ricaviamo la derivata della soluzione generale $y' = -2e^{-2x}$ e sostituiamo nell'equazione differenziale data

$$-2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 2k = 1$$

da cui $k = \frac{1}{2}$.

Esercizio 7. Precisare se la funzione $y = xe^x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$.

Soluzione. $y' = e^x + xe^x$; $y'' = 2e^x + xe^x$; sostituendo si ha

$$2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0$$

risposta positiva.

1. Equazioni differenziali del primo ordine

1.1. Variabili separabili.

Esercizio 8. Risolvere

$$\frac{dy}{dt} = -2y \quad con \quad y(1) = -5$$

Soluzione. Osserviamo che $-2y = 0$ quando $y = 0$. Pertanto la costante $y(t) = 0$ è una soluzione particolare. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\frac{dy}{y} = -2dt$$

cioè

$$\ln|y| = -2t + B$$

da cui

$$|y| = e^B e^{-2t} = Ce^{-2t}$$

dove, ovviamente, $e^B = C$ se $y > 0$ e $C = -e^B$ se $y < 0$

La soluzione generale è

$$y = Ce^{-2t}$$

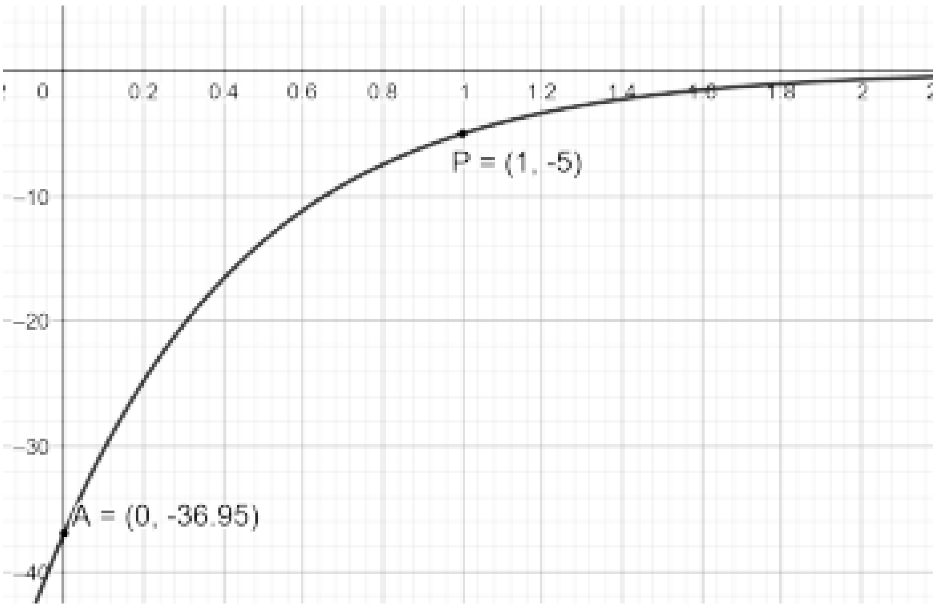
dove C è una costante. Introduciamo ora la condizione assegnata; avremo

$$-5 = Ce^{-2\cdot 1} \quad -5 = Ce^{-2} \quad C = -5e^2$$

La soluzione particolare sarà

$$y(t) = -5e^2 e^{-2t} = -5e^{2(1-t)}$$

Tracciamo una parte del grafico di questa soluzione particolare



Esercizio 9. Trovare la soluzione generale della equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x$$

Trovare poi la soluzione particolare per $y(0) = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Se $y = 0$ allora $y^2 = 0$. Pertanto $y(x) = 0$ è una soluzione costante. Separiamo ora le variabili

$$\frac{dy}{y^2} = \sin x dx$$

e integrando

$$-y^{-1} = -\cos x + C$$

da cui

$$y = \frac{1}{\cos x - C}$$

la soluzione generale sarà $y\left(x\right)=0$ e

$$y\left(x\right)=\frac{1}{\cos x-C}$$

troviamo la soluzione particolare

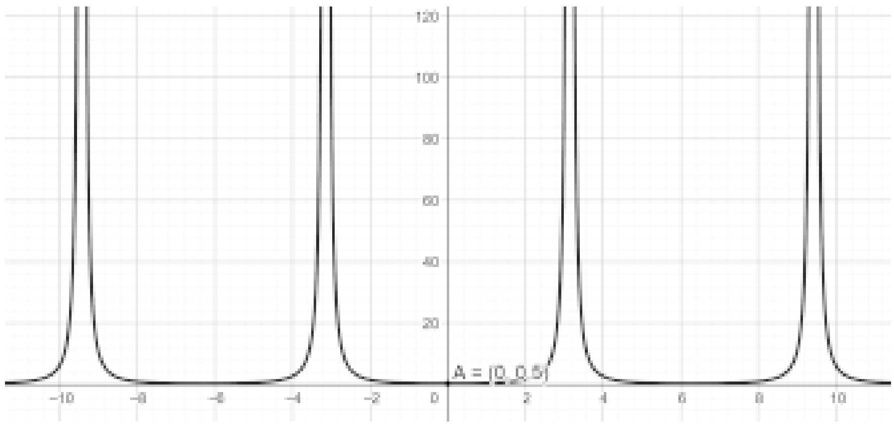
$$\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{1-C}\quad 1-C=2$$

da cui

$$C=-1$$

La soluzione particolare sarà

$$y=\frac{1}{\cos x+1}$$



Esercizio 10. $\tan x\cdot\sin^2 y dx+\cos^2 x\cdot\cot y dy=0$

Soluzione. divido primo e secondo membro per $\cos^2 x\sin^2 y$ per separare le variabili e ottengo

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx+\frac{\cos y}{\sin^3 y}dy=0$$

per cui

$$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx+\int\frac{\cos y}{\sin^3 y}dy=C$$

risolvendo i singoli integrali con i metodi noti, si ha

$$\int-\cos^{-3}xd\left(\cos x\right)+\int\sin^{-3}yd\left(\sin y\right)=C$$

e si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 y} &= 2C\\ \cot^2 y &= \tan^2 x+2C\end{aligned}$$

Esercizio 11. $xy^{'}-y=y^3$

Soluzione. $y^{'}=\frac{dy}{dx}$, per cui

$$x\frac{dy}{dx}-y=y^3$$

divido per dy

$$\frac{x}{dx}=\frac{y^3+y}{dy}$$

cioè

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y\left(y^2+1\right)}$$

da cui

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y\left(y^2+1\right)}+C$$

il secondo integrale si risolve scrivendo la frazione come somma di frazioni di grado inferiore di numeratori incogniti

$$\frac{1}{y\left(y^2+1\right)}=\frac{A}{y}+\frac{By}{y^2+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} Ay^2+A+By^2 &= 1 \\ y^2\left(A+B\right)+A &= 1 \end{aligned}$$

uguagliando i coefficienti dei termini omogenei dei due membri, si ha

$$A=-B \qquad A=1$$

$$A=1 \qquad B=-1$$

l'integrale si scompone allora

$$\ln|x|=\int\frac{dy}{y}-\int\frac{ydy}{y^2+1}+C$$

$$\begin{aligned} \ln|x| &= \ln|y|-\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2+1}+C \\ \ln|x| &= \ln|y|-\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|+C \end{aligned}$$

cioè

$$\ln|x|=\ln\left|\frac{Cy}{\sqrt{y^2+1}}\right|$$

da cui

$$x=\frac{Cy}{\sqrt{y^2+1}}$$

Esercizio 12. $xyy^{'}=1-x^2$

Soluzione. sempre ponendo $y^{'}=\frac{dy}{dx}$, per cui

$$\begin{aligned} xy\frac{dy}{dx} &= 1-x^2 \\ ydy &= \frac{1-x^2}{x}dx \end{aligned}$$

passando agli integrali

$$\int ydy=\int\frac{1-x^2}{x}dx+C$$

ma $\int\frac{1-x^2}{x}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int xdx$, per cui

$$\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C$$

con qualche calcolo algebrico

$$\begin{aligned} y^2 &= 2\ln|x|-x^2+\ln C_1 \\ y^2+x^2 &= \ln Cx^2 \\ Cx^2 &= e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Esercizio 13. $y-xy^{'}=a\left(1+x^2y^{'}\right)$

Soluzione. utilizzo anche qui il metodo delle variabili separabili; svolgo la moltiplicazione e raggruppo le y'

$$xy'(ax+1)=y-a$$

separo le variabili con la consueta sostituzione $y'=\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{y-a}=\frac{dx}{x(1+ax)}$$

passo agli integrali

$$\int\frac{dy}{y-a}=\int\frac{dx}{x(1+ax)}+C$$

il secondo integrale si risolve come nel precedente esercizio

$$\frac{1}{x(1+ax)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+ax}$$

da cui

$$\begin{aligned}1&=A+Aax+Bx\\1&=x(Aa+B)+A\end{aligned}$$

confronto i termini con lo stesso grado

$$\begin{aligned}A&=1\\B&=-a\end{aligned}$$

l'integrale è pertanto

$$\int\frac{dy}{y-a}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{adx}{1+ax}+C$$

risolvo i singoli integrali

$$\ln|y-a|=\ln|x|-\ln|1+ax|+\ln C=\ln\left|\frac{Cx}{1+ax}\right|$$

risolvendo l'equazione logaritmica si ha

$$y-a=\frac{Cx}{1+ax}$$

e infine

$$y=\frac{a^2x+Cx+a}{1+ax}=\frac{C_1x+a}{1+ax}$$

Esercizio 14. $3e^x\tan ydx+(1-e^x)\sec^2 ydy=0$

Soluzione. dividendo per $\tan y(1-e^x)$, ottenendo

$$\frac{3e^xdx}{(1-e^x)}+\frac{\sec^2 ydy}{\tan y}=0$$

ma $\sec^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y$, per cui

$$\frac{3e^xdx}{(1-e^x)}+\frac{\left(1+\tan^2 y\right)dy}{\tan y}=0$$

passando agli integrali, si ha

$$\int\frac{3e^xdx}{(1-e^x)}+\int\frac{\left(1+\tan^2 y\right)dy}{\tan y}=C$$

$$3\int\frac{e^xdx}{(1-e^x)}+\int\frac{1}{\tan y}dy+\int\tan ydy=C$$

ma $e^xdx=d(e^x)$ per cui

$$3\int\frac{d(e^x)}{1-e^x}+\int\frac{\cos y}{\sin y}dy+\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=C$$

calcoliamo gli integrali

$$-3\ln|1-e^x|+\ln|\sin y|-\ln|\cos y|-\ln C=0$$

applicando le proprietà dei logaritmi si ha

$$\ln\frac{\tan y}{C(1-e^x)^3}=0$$

siccome $\ln a=0$ se $a=1$,

$$\tan y=C(1-e^x)^3$$

Esercizio 15. $(1+e^x)\,yy^{'}=e^x$ con $y(0)=1$

Soluzione. divido per $(1+e^x)$

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{1+e^x}$$

cioè

$$ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

passando agli integrali

$$\begin{aligned}\int ydy &= \int\frac{e^x}{1+e^x}dx+C\\ \frac{y^2}{2} &= \ln|1+e^x|+\ln C\\ \frac{y^2}{2} &= \ln[C(1+e^x)]\end{aligned}$$

ora $y(0)=1$, per cui sostituendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \ln[C(2)]\\ e^{\frac{1}{2}} &= 2C\\ C &= \frac{\sqrt{e}}{2}\end{aligned}$$

e la soluzione è

$$e^{\frac{y^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+e^x)$$

Esercizio 16. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(x^2y-y\right)dy=0$ con $y(0)=1$

raccolgo dentro le parentesi

$$x\left(y^2+1\right)dx+y\left(x^2-1\right)dy=0$$

divido per $\left(y^2+1\right)\left(x^2-1\right)$

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2+1}dy=0$$

passando agli integrali

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2+1}dy &= 0\\ \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{y}{y^2+1}dy &= 0\end{aligned}$$

risolvendo gli integrali

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|=\frac{1}{2}\ln C$$

applicando le proprietà dei logaritmi e risolvendo

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2+1\right)=C_1$$

applicando le condizioni iniziale date

$$-1\times 2=C_1$$

per cui

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2+1\right)=-2$$

o

$$y^2=-\frac{1+x^2}{x^2-1}$$

Esercizio 17. $xdy+ydx=y^2dx$

Soluzione. riscriviamo come

$$xdy = \left(y^2 - y\right) dx$$

cioè

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y\,(y-1)}$$

risolviamo l'integrale al secondo membro riscrivendo la frazione come somma di due frazioni

$$\frac{1}{y\,(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{y\,(A+B) - A}{y\,(y-1)}$$

confrontando i coefficienti otteniamo $A = -1$ e $B = 1$, per cui

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1}$$

da cui

$$\ln|x| = \ln \frac{|y-1|}{|y|} + \ln C$$

cioè

$$xy = C\,(y-1)$$

Esercizio 18. $y' \sin x = y \ln y$ con $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Soluzione. sempre separando le variabili con la sostituzione $y' = \frac{dy}{dx}$, si ha

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + C$$

ma nella frazione$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln y}$, la derivata del logaritmo è proprio $\frac{1}{y}$, e, utilizzando le formule goniometriche, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, per cui

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\,(\ln y)}{\ln y} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + C \\
\ln(\ln y) &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + C \\
\ln(\ln y) &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + C
\end{aligned}$$

ma $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$ per cui

$$\begin{aligned}
\ln(\ln y) &= \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \ln C \\
\ln y &= C \tan \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

cioè

$$y = e^{C \tan \frac{x}{2}}$$

applichiamo ora la condizione assegnata $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\right]$

$$1 = e^C$$

da cui $C = 0$ e la soluzione particolare è $y = 1$

Esercizio 19. $y' = (x+y)^2$.

Soluzione. Per ottenere la separazione delle variabili, è necessario introdurre la seguente sostituzione:

$$x+y=u$$

da cui

$$\begin{aligned} y &= u-x \\ y' &= u'-1 \end{aligned}$$

sostituendo

$$u'-1=u^2$$

cioè

$$\frac{du}{dx}=1+u^2$$

da cui

$$\frac{du}{1+u^2}=dx$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{du}{1+u^2}=\int dx$$

questi due sono entrambi integrali elementari, per cui

$$\arctan u = x+C$$

$$\arctan(x+y)=x+C$$

Esercizio 20. $y'=(8x+2y+1)^2$

Soluzione. come prima

$$\begin{aligned} 8x+2y+1 &= u \\ 8+2y' &= u' \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{u'-8}{2}=u^2$$

$$\frac{du}{dx}=2u^2+8$$

separando

$$\frac{du}{2(u^2+4)}=dx$$

passando agli integrali

$$\int \frac{du}{2(u^2+4)}=\int dx + C$$

anche questi sono integrali elementari

$$\frac{1}{4}\arctan\frac{u}{2}=x+C$$

$$\frac{1}{4}\arctan\frac{8x+2y+1}{2}=x$$

Esercizio 21. $(2x+3y-1)\,dx+(4x+6y-5)\,dy=0$

Soluzione. $y'=\dfrac{1-(2x+3y)}{4x+6y-5}$ e introduco il seguente cambio di variabile

$$u=2x+3y$$

per cui, risolvendo rispetto a y

$$y=\frac{u-2x}{3}$$

e derivando rispetto a x

$$y'=\frac{u'-2}{3}$$

sostituendo nell'equazione iniziale

$$\frac{u^{'}-2}{3}=\frac{1-u}{2u-5}$$

cioè

$$u^{'}=\frac{3-3u}{2u-5}+2=\frac{u-7}{2u-5}$$

ma $u^{'}=\frac{du}{dx}$, per cui separando le variabili

$$\frac{(2u-5)\,du}{u-7}=dx$$

e passando agli integrali

$$\int\frac{(2u-5)\,du}{u-7}=\int dx+C$$

riscrivendo il numeratore, come per gli integrali di frazioni con Num e Den dello stesso grado

$$\int\left(2+\frac{9}{u-7}\right)du=x+C$$

risolvendo

$$2u+9\ln|u-7|=x+C$$

sostituendo il valore di u, inizialmente posto, si ha

$$4x+6y+9\ln|2x+3y-7|=x+C$$

e dividendo per 3 e raggruppando le costanti

$$3\ln|2x+3y-7|+x+2y=C_1$$

Esercizio 22. $(2x-y)\,dx+(4x-2y+3)\,dy=0$

Soluzione. riscrivo come

$$y^{'}=\frac{y-2x}{4x-2y+3}$$

osservando che $4x-2y=2\,(2x-y)$, pongo $u=2x-y$ da cui

$$y=2x-u$$

e derivando rispetto a x

$$y^{'}=2-u^{'}$$

e sostituendo nell'equazione iniziale

$$2-u^{'}=\frac{-u}{2u+3}$$

cioè

$$u^{'}=\frac{5u+6}{2u+3}$$

ma $u^{'}=\frac{du}{dx}$ e risolvendo separando le variabili, si ha

$$\frac{(2u+3)}{5u+6}du=dx$$

passando agli integrali

$$\int\frac{2u+3}{5u+6}du=\int dx+C$$

$$\frac{2}{5}\int\frac{10u+15}{10u+12}du=x+C$$

$$\frac{2}{5}\int\left(1+\frac{3}{10u+12}\right)du=x+C$$

risolvendo

$$2u+3\ln|5u+6|=5x+C_1$$

sostituendo nuovamente

$$4x-2y+3\ln|10x-5y+6|=5x+C_1$$

cioè

$$x+2y+C_1=3\ln|10x-5y+6|$$

2. Equazioni Omogenee

L'equazione differenziale $P(x,y)\,dx + Q(c,y)\,dy = 0$ si dice omogenea, se $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sono funzioni dello stesso grado. L'equazione si può allora trasformare come

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

e con l'aiuto della sostituzione $y = ux$, dove u è la nuova funzione incognita, si riduce ad una equazione a variabili separabili.

Esercizio 23. $y^{'} = \frac{y}{x} - 1$

Soluzione. pongo $y = ux$, e derivando rispetto a x, $y^{'} = u + u^{'}x$ e sostituendo

$$u + xu^{'} = u - 1$$

cioè

$$u^{'} = -\frac{1}{x}$$

quindi

$$u = -\int \frac{dx}{x} + C$$

risolvendo l'integrale elementare

$$u = -\ln|x| + \ln C$$

sostituendo nuovamente

$$\frac{y}{x} = -\ln|x| + \ln C$$

$$y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Esercizio 24. $y^{'} = -\dfrac{x+y}{x}$

Soluzione. pongo $y = ux$, e derivando rispetto a x, $y^{'} = u + u^{'}x$ e sostituendo

$$u + u^{'}x = -\frac{x(u+1)}{x} = -u - 1$$

da cui

$$u^{'} = -\frac{2u+1}{x}$$

risolvo separando le variabili

$$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x}$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{du}{2u+1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C$$

risolvendo gli integrali elementari, si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln|2u+1| = -\ln|x| + \ln C$$

$$\ln|2u+1| = 2\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

risolvendo l'equazione logaritmica

$$2u + 1 = \frac{C^2}{x^2}$$

e sostituendo nuovamente

$$\frac{2y+x}{x} = \frac{C_1}{x^2}$$

$$y = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$$

Esercizio 25. $(x-y)\,ydx - x^2dy = 0$

Soluzione. riscrivendo l'equazione

$$y^{'} = \frac{y(x-y)}{x^2}$$

sostituendo $y = ux$, da cui $y^{'} = u + u^{'}x$, ottengo

$$u + u'x = \frac{ux^2(1-u)}{x^2} = u(1-u)$$

da cui

$$u^{'} = \frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{x}$$

separando le variabili

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

e passando agli integrali

$$\frac{1}{u} = \ln|Cx|$$

sostituendo nuovamente

$$\frac{x}{y} = \ln|Cx|$$

oppure

$$y = \frac{x}{\ln|Cx|}$$

Esercizio 26. $\left(x^2+y^2\right)dx - 2xydy = 0$

Soluzione. rispetto a $y^{'} = \frac{dy}{dx}$

$$y^{'} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$$

sostituisco $\frac{y}{x} = u$ e $y^{'} = u + u^{'}x$, ottenendo

$$u + u^{'}x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2}$$

da cui

$$u^{'} = \frac{1-u^2}{2ux}$$

e separando le variabili

$$\frac{2u}{1-u^2}du = \frac{dx}{x}$$

passando agli integrali

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x} + C$$

e risolvendo, poiché $2udu = d\left(u^2\right)$

$$-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|Cx|$$

$$\frac{1}{1-u^2} = Cx$$

oppure

$$Cx\left(1-u^2\right) = 1$$

sostituendo nuovamente

$$Cx\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) = 1$$

$$x^2 - y^2 = Cx$$

Esercizio 27. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

Soluzione. Riscriviamo come $y' = -\frac{y}{2\sqrt{xy}-x}$ e applichiamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + u'x$

$$u + u'x = -\frac{ux}{2x\sqrt{u}-x} = -\frac{u}{2\sqrt{u}-1}$$

da cui

$$u'x = -\frac{u}{2\sqrt{u}-1} - u = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1} \quad \textit{cioè} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}$$

separando le variabili e passando agli integrali, si ottiene

$$\int \frac{-2\sqrt{u}+1}{2u\sqrt{u}}du = \int \frac{dx}{x} + C \qquad \int -\frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \ln x + C$$

$$-\ln u - \frac{1}{\sqrt{u}} = \ln x + C \quad -\ln|y| + \ln|x| + \sqrt{\tfrac{x}{y}} = \ln x + C \quad \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$$

Esercizio 28. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$$

introduciamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$ e avremo

$$u + xu' = \frac{\sqrt{x^2(1+u^2)}+ux}{x} = \sqrt{1+u^2} + u$$

per cui

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{x} \qquad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

passando agli integrali si ha

$$\int \tfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \tfrac{dx}{x} \quad \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| = \ln Cx \quad Cx = u + \sqrt{u^2+1}$$

cioè

$$Cx = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = \frac{1}{x}\left(y + \sqrt{y^2+x^2}\right)$$

svolgendo si ha

$$Cx^2 - y = \sqrt{y^2+x^2} \qquad y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}$$

Esercizio 29. Integrare l'equazione $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{v}dy = 0$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere come $x - y\cos\frac{y}{x} + x\cos\frac{y}{v}\frac{dy}{dx}' = 0$; con la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$, abbiamo

$$x - xu\cos u + x\cos u\,(u + xu') = 0$$

che si riduce a

$$\cos u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

separando le variabili e passando all'integrale si ha

$$\int \cos u du = -\int \frac{dx}{x}$$

da cui,

$$C = xe^{\sin\frac{y}{x}}$$

Esercizio 30. $x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$

Soluzione. dividiamo per ydx e otteniamo $\frac{x}{y}\ln\frac{x}{y} - x' = 0$; sostituiamo $x = uy$ e $x' = u + yu'$ e avremo

$$u\ln u = u + yu' \qquad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u(\ln u - 1)}$$

integrando

$$\ln y + \ln C = \ln(\ln u - 1)$$

da cui

$$Cy + 1 = \ln\frac{x}{y}$$

tornando alle variabili originarie

$$x = ye^{Cy+1}$$

Esercizio 31. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$

Soluzione. riscriviamo l'equazione dividendo per dy:

$$xx' = \frac{x^2}{y} - y^3$$

sostituiamo $x = uy$ e $x' = u + yu'$ e avremo

$$uy(u + yu') = y\left(u^2 - y^2\right) \qquad yu' = -y$$

separiamo le variabili e passiamo agli integrali

$$\int udu = -\int ydy \qquad \frac{u^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

svolgendo i calcoli algebrici si ottiene la soluzione generale

$$x^2 + y^4 = Cy^2$$

Esercizio 32. $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$

Soluzione. Dividiamo per dx e sostituiamo $y = ux$, $y' = u + xu'$

$$2x^3u^2 - ux + ux + x^2u' = 0 \qquad \frac{du}{u^2} = -2xdx$$

passando agli integrali

$$\frac{1}{u} = x^2 + C \qquad \frac{x}{y} + x^2 = C$$

da cui con calcoli algebrici

$$y = \frac{x}{x^2 + C}$$

Esercizio 33. $x^2(y+1)dx + \left(x^2 - 1\right)(y-1)dy = 0$

Soluzione. riscriviamo come

$$\frac{x^2}{x^3 - 1}dx = -\frac{y-1}{y+1}dy$$

passando agli integrali

$$\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3-1}dx = -\int\frac{y-1}{y+1}dy = -\int\frac{y+1}{y+1}dy + 2\int\frac{dy}{y+1}$$

risolvendo si ha

$$\ln\left|x^3 - 1\right| = -3y + \ln(y+1)^6$$

da cui

$$3y + \ln\frac{\left|x^3-1\right|}{(y+1)^6} = C$$

Esercizio 34. $\left(1 + y^2\right)\left(e^{2x}dx - e^ydy\right) - (1+y)dy = 0$

Soluzione. riscriviamo come

$$e^{2x}\left(1+y^2\right)dx=e^y\left(1+y^2\right)dy+(1+y)\,dy$$

da cui, passando agli integrali

$$\int e^{2x}dx=\int e^y dy+\int\frac{1+y}{1+y^2}dy=e^y+\int\frac{dy}{1+y^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}dy$$

risolvendo

$$\frac{1}{2}e^{2x}-e^y+\arctan y+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=C$$

Esercizio 35. $\left(4x^2+3xy+y^2\right)dx+\left(4y^2+3xy+x^2\right)dy=0$

Soluzione. Riscriviamo come

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^2+3xy+y^2}{x^2+3xy+4y^2}$$

Sostituiamo $y=ux$ e $y'=u+u'x$ e avremo

$$u'x=-\frac{\cancel{x^2}\left(4+3u+u^2\right)}{\cancel{x^2}\left(1+3u+4u^2\right)}-u=-\frac{4\left(u^3+u^2+u+1\right)}{1+3u+4u^2}=-\frac{4\,(u+1)\left(u^2+1\right)}{1+3u+4u^2}$$

da cui passando agli integrali nella separazione delle variabili

$$\frac{1}{4}\int\frac{1+3u+4u^2}{(u+1)\left(u^2+u+1\right)}du=-\int\frac{dx}{x}$$

risolviamo il primo integrale riscrivendo la frazione come somma di due frazioni

$$\frac{1+3u+4u^2}{(u+1)\left(u^2+u+1\right)}=\frac{A}{u+1}+\frac{B+Cu}{u^2+u+1}=\frac{u^2\,(A+C)+u\,(B+C)+(A+B)}{(u+1)\left(u^2+u+1\right)}$$

confrontando i coefficienti dei termini di pari grado tra i due membri, abbiamo

$$\begin{cases}A+C=4\\B+C=3\\A+B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1\\B=0\\C=3\end{cases}$$

l'integrale diviene

$$\frac{1}{4}\int\frac{du}{u+1}+\frac{3}{8}\int\frac{2u}{u^2+u+1}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln|u+1|+\frac{3}{8}\ln\left|u^2+1\right|=-\ln x+\ln C$$

$$\frac{\ln\left[(u+1)^2\left(u^2+1\right)^3\right]}{8}=\ln\frac{c}{x}$$

$$\left(\tfrac{y}{x}+1\right)^2\left(\tfrac{y^2}{x^2}+1\right)^3=\tfrac{C}{x^8}\qquad(x+y)^2\left(x^2+y^2\right)^3=C$$

Esercizio 36. Dalla condizione $y=1$ per $x=2$, ricavare la soluzione particolare dell'equazione $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$.

Soluzione. riscriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-3y^2}{2xy}$$

e sostituiamo $y=ux$ e $y'=u+xu'$ ottenendo

$$xu'=-\frac{x^2-3u^2x^2}{2ux^2}-u=\frac{u^2-1}{2u}$$

risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\int\frac{2u}{u^2-1}du=\int\frac{dx}{x}$$

da cui

$$\ln\left|u^2-1\right|=\ln|Cx|$$

cioè

$$y^2=Cx^3+x^2$$

nel caso in cui $y(2)=1$, abbiamo $C=-\frac{3}{8}$ e l'equazione diviene

$$y=x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$$

Esercizio 37. $(2x-y+4)\,dy+(x-2y+5)\,dx=0$

Soluzione. Questa è una equazione riconducibile a equazione omogenea essendo della forma

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y-c_2}\right)=\frac{-x+2y-5}{2x-y+4}$$

se il determinante della matrice formata dai coefficienti delle due variabili è diverso da zero

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$$

allora si può introdurre la sostituzione $x=u+\alpha$ e $y=v+\beta$, dove α e β si possono ricavare dal sistema

$$\begin{cases} a_1\alpha & +b_1\beta+c_1=0 \\ a_2\alpha+ & b_2\beta+c_2=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} -\alpha & +2\beta-5=0 \\ 2\alpha- & \beta+4=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

per cui la sostituzione è del tipo $x=u-1$, $dx=du$, e $y=v+2$, $dy=dv$

$$v'=\frac{dv}{du}=\frac{1-u+2v+4-5}{2u-2-v-2+4}=\frac{2v-u}{2u-v}$$

introduciamo ora la sostituzione tipica delle equazioni omogenee, $v=ut$, $v'=t+ut'$

$$ut'=\frac{u(2t-1)}{u(2-t)}-t=\frac{t^2-1}{2-T}$$

passando agli integrali

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{2-t}{t^2-1}dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2-1}dt$$
$$\ln Cu=2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right|$$

cioè, svolgendo

$$Cu=\frac{(t-1)^{\frac{1}{2}}}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}$$

ritornando alle incognite originarie x,y, poiché $t=\frac{v}{u}=\frac{y-2}{x+1}$, si ha

$$C(x+1)=\frac{\left(\frac{y-2}{x+1}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{y-2}{x+1}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

da cui, elevando al quadrato

$$(y-x-3)=C(x+y-1)^3$$

Esercizio 38. $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

Soluzione. In questo caso l'equazione è riconducibile ad omogenea ma il determinante dei coefficienti delle due incognite è nullo, infatti

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

la sostituzione necessaria diventa $u=a_1x+b_1y$, $u'=a_1+b_1y'$, cioè $u=-3(x+y)$, $u'=-3-3y'$ e $y'=\dfrac{u'+3}{-3}$. Avremo quindi

$$\frac{u'+3}{3}=-\frac{u+1}{\frac{3-u}{3}}=\frac{3(u+1)}{u-3}$$

cioè

$$\frac{1}{3}\frac{du}{dx}=\frac{3u+3-u-3}{u-3}=\frac{2(u+3)}{u-3}$$

e passando agli integrali

$$\tfrac{1}{6}\int\frac{u-3}{u+3}du=\int dx\qquad \tfrac{1}{6}\int du-\int\frac{du}{u+3}=\int dx$$

$$\frac{1}{6}u - \ln|u+3| = x + C$$

passando alle incognite originarie

$$3x + y + 2\ln(1 - x - y) = C$$

3. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale della forma $y' + P(x)y = Q(x)$ di primo grado rispetto a y e a y' si chiama equazione *lineare*. Se la funzione generale dell'equazione acquista la forma $y' + P(x)y = 0$ è detta *lineare omogenea.*

In questo caso le variabili si separano e la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Nel caso dell'equazione lineare la formula risolutiva si dimostra essere

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Esercizio 39. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$

Soluzione. Risolviamo applicando la formula risolutiva dell'equazione lineare non omogenea

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right]$$

da cui

$$y = e^{\ln x}\left[\int xe^{-\ln x}dx + C\right] = x\left(\int dx + C\right) = x^2 + Cx$$

Esercizio 40. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y' + y\cos x = 0$; trovare la soluzione particolare con valore iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Calcoliamo prima l'integrale

$$\int \cos x dx = \sin x + B$$

la soluzione generale sarà

$$y(x) = Ce^{-\sin x}$$

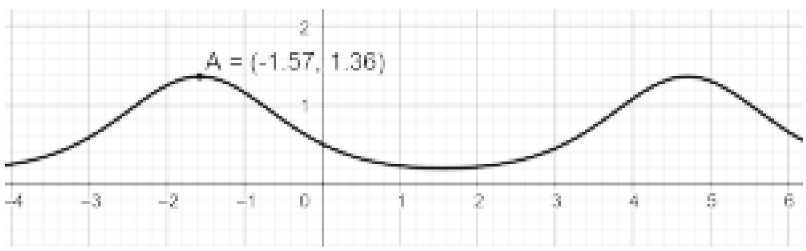
cerchiamo la soluzione particolare

$$y(0) = \frac{1}{2} = Ce^{-\sin 0} = C$$

pertanto

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-\sin x}$$

Vediamo il grafico della soluzione particolare



Esercizio 41. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$

Soluzione. Risolviamo applicando la formula risolutiva dell'equazione lineare non omogenea

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int x^3 e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + C\right] = e^{-\ln x^2}\left[\int x^3 e^{\ln x^2}dx + C\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\int x^5 dx + C\right) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

Esercizio 42. $\left(1+y^2\right)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)dy$

Soluzione. L'equazione è lineare rispetto a y, infatti

$$x' + \frac{xy}{1+y^2} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$$

dove $P\left((y\right) = \frac{y}{1+y^2}$ e $Q\left(y\right) = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$. Pertanto

$$x' = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy}\left[\int \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} e^{\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy} dy + C\right]$$

da cui

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\int \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}\sqrt{1+y^2}dy + C\right]$$

$$x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$$

Esercizio 43. $y^2 dx - (2xy+3)\,dy = 0$

Soluzione. Anche in questo caso si tratta di un'equazione lineare in y:

$$x' - \frac{2x}{y} = \frac{3}{y^2}$$

da cui

$$x = e^{\int \frac{2}{y}dy}\left[\int \frac{3}{y^2} e^{-\int \frac{2}{y}dy} dy + C\right] = y^2\left(\int \frac{3}{y^2}\cdot\frac{1}{y^2}dy + C\right)$$

cioè

$$x = Cy^3 - \frac{1}{y}$$

Esercizio 44. $\left(1+x^2\right)y' + 2xy - \frac{1}{x} = 0$

Soluzione. Riscriviamo:

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$$

dove $P\left(x\right) = \frac{2x}{1+x^2}$ e $Q\left(x\right) = \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$ per cui

$$y = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx + C\right] = e^{\ln \frac{1}{1+x^2}}\left[\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} e^{\ln\left(1+x^2\right)} dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{1+x^2}\left(\int \frac{1+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx + C\right) = \frac{1}{1+x^2}\left(\ln|x| + C\right)$$

cioè

$$y\left(1+x^2\right) = \ln|x| + C$$

Esercizio 45. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni date, $xy' + y - e^x = 0$ con $y = b$ quando $x = a$.

Soluzione. L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$$

da cui

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right] = \frac{1}{x}\left(\int \frac{e^x}{x}\cdot x dx + C\right) = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$$

sostituendo le condizioni assegnate, possiamo ricavare C:

$$b = \tfrac{e^a}{a} + \tfrac{c}{a} \qquad C = ab - e^a$$

la soluzione particolare sarà

$$y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}$$

Esercizio 46. $\left(1-x^2\right)y'+xy=0$

Soluzione. caso particolare del tipo $y'+P\left(x\right)y=0$, per cui la soluzione sarà del tipo $y=Ce^{-\int P(x)dx}$;

$$y=Ce^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}=Ce^{\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}=C\sqrt{1-x^2}$$

Esercizio 47. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni date,

$$y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0$$

con $y=0$ quando $x=0$.

Soluzione. Riscriviamo l'equazione mettendo in evidenza la forma lineare

$$y'-\frac{y}{1-x^2}=1+x$$

per cui

$$y=e^{\int\frac{}{1-x^2}dx}\left[\int\left(1+x\right)e^{-\int\frac{}{1-x^2}dx}+C\right]=e^{\frac{}{2}\ln\left|\frac{1+X}{1-X}\right|}\left[\int\left(1+x\right)e^{\frac{}{2}\ln\left|\frac{1-X}{1+X}\right|}+C\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\int\left(x+1\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx+C\right)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\int\sqrt{1-x^2dx}+C\right)=$$

risolviamo l'integrale mediante la sostituzione $x=\sin t$ e $dx=\cos tdt$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\int\cos^2tdt+C\right)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt+C\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\int\frac{1}{2}dt+\int\frac{\cos 2t}{2}dt+C\right)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C\right)$$

$$y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C\right)$$

troviamo la soluzione particolare

$$C=-\tfrac{1}{2}\qquad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\left(\arcsin x+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-1\right)$$

Esercizio 48. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni date,

$$y'-y\tan x=\frac{1}{\cos x}$$

con $y=0$ per $x=0$.

Soluzione. $P\left(x\right)=\tan x$ e $Q\left(x\right)=\frac{1}{\cos x}$

$$y=e^{\int\tan xdx}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\int\tan xdx}dx+C\right)=e^{-\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{\ln\cos x}dx+C\right)$$

$$y=\frac{1}{\cos x}\left(\int dx+C\right)=\frac{x}{\cos x}+\frac{C}{\cos x}$$

la soluzione particolare

$$0=C\qquad y=\frac{x}{\cos x}$$

Esercizio 49. $y'+\frac{y}{x}=-xy^2$

Soluzione. Questa è la cosiddetta equazione di Bernoulli del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$. La si può trasformare in una equazione lineare mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2$$

raccogliendo v al primo membro si ha

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = -xu^2v^2$$

per ricavare u, poniamo $u' + \frac{u}{x} = 0$, che risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0 \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x} \quad u = \frac{1}{x}$$

riscriviamo quindi l'equazione sostituendo il valore trovato di u

$$\frac{v'}{x} = -\frac{x}{x^2}v^2 \quad v' = -v^2$$

risolvendo per trovare v, abbiamo

$$\frac{dv}{dx} = -v^2 \quad \int v^{-2}dv = -\int dx \quad v = \frac{1}{x+C}$$

ma $v = \frac{y}{u} = xy$ per cui

$$xy = \frac{1}{x+C} \qquad y\left(x^2 + Cx\right) = 1$$

Esercizio 50. $2xyy' - y^2 + x = 0$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2y}$$

Questa è la cosiddetta equazione di Bernoulli del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, con $\alpha = -1$. La si può trasformare in una equazione lineare mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$. Otteniamo

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2x} = -\frac{1}{2uv} \qquad v\left(u' - \frac{u}{2x}\right) + uv' = -\frac{1}{2uv}$$

ricaviamo u uguagliando a zero il coefficiente di v al primo membro

$$u' - \frac{u}{2x} = 0 \quad \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \quad \ln|u| = \ln\sqrt{x}$$

da cui $u = \sqrt{x}$. sostituiamo

$$v'\sqrt{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}v} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2xv} \quad \int 2vdv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$v^2 = \ln\frac{1}{|x|} + \ln C = \ln\frac{C}{x}$$

essendo ora $v = \frac{y}{u} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, avremo

$$y^2 = x\ln\frac{C}{x}$$

Esercizio 51. $y' - y\dfrac{2x-1}{x^2} = 1$

Soluzione. risolviamo mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - uv\frac{2x-1}{x^2} = 1$$

raccogliamo i termini contenenti v

$$v\left(u' - u\frac{2x-1}{x^2}\right) + uv' = 1$$

ricaviamo u uguagliando a zero il coefficiente di v al primo membro

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2x}{x^2}dx - \int \frac{dx}{x^2}$$

da cui

$$u = x^2e^{\frac{1}{x}}$$

sostituiamo tale funzione nell'equazione assegnata

$$x^2e^{\frac{1}{x}}v' = 1$$

cioè
$$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x^2e^{\frac{1}{x}}}$$
separando le variabili e passando agli integrali
$$\int dv=\int\frac{dx}{x^2e^{\frac{1}{x}}}$$
per rendere evidente il procedimento, risolviamo l'integrale al secondo membro mediante la sostituzione $t=\frac{1}{x}$ e $dt=-\frac{1}{x^2}dx$, pertanto
$$v=-\int e^{-t}dt=e^{-t}=e^{-\frac{1}{x}}+C$$
avremo quindi
$$y=uv=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right)$$

Esercizio 52. $ydx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$

Soluzione. questa equazione ha la forma dell'equazione di Bernoulli del tipo $x'+P(y)x=Q(y)x^{\alpha}$. Se, infatti, la riscriviamo, avremo
$$x'+\frac{x}{y}=\frac{1}{2}x^3$$
risolviamo con la sostituzione $x=uv$ e $x'=u'v+uv'$ e avremo
$$u'v+uv'+\tfrac{uv}{y}=\tfrac{1}{2}u^3v^3\qquad v\left(u'+\tfrac{u}{y}\right)+uv'=\tfrac{1}{2}u^3v^3$$
ricaviamo u da
$$u'+\frac{u}{y}=0\quad\int\frac{du}{u}=-\int\frac{dy}{y}\quad u=\frac{1}{y}$$
otterremo quindi
$$\frac{v'}{y}=\frac{1}{2}\frac{v^3}{y^3}\quad\int\frac{dv}{v^3}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2}\quad\frac{1}{2v^2}=\frac{1}{2y}+C$$
ma $v=xy$, per cui
$$\tfrac{1}{2x^2y^2}=\tfrac{1}{2y}+C\qquad\tfrac{1}{x^2y^2}=\tfrac{1}{y}+C'$$
cioè
$$x^2=\frac{1}{y+C'y^2}$$

Esercizio 53. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$

Soluzione. anche in questo caso risolviamo ponendo $y=uv$ e $y'=u'v+uv'$
$$u'v+uv'+uv\cos x=\sin x\cos x$$
raccogliendo i termini contenenti v e ponendoli uguali a zero, possiamo ricavare u
$$v\left(u'+u\cos x\right)+uv'=\sin x\cos x\qquad u'+u\cos x=0$$
da cui, passando agli integrali
$$\int\tfrac{du}{u}=-\int\cos xdx\qquad u=e^{-\sin x}$$
sostituendo, per ricavare v', avremo
$$e^{-\sin x}v'=\sin x\cos x$$
cioè
$$\int dv=\int\frac{\sin x\cos x}{e^{-\sin x}}dx=\int\sin x\cos xe^{\sin x}dx$$
risolviamo l'integrale al secondo membro sostituendo $\sin x=t$ e $\cos xdx=dt$, per cui
$$v=\int te^tdt=te^t-\int e^tdt=te^t-e^t=e^{\sin x}\left(\sin x-1\right)+C$$
avremo quindi
$$y=uv=e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}\left(\sin x-1\right)+Ce^{-\sin x}$$
da cui
$$y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$$

Esercizio 54. $xy'-\dfrac{y}{x+1}-x=0$

Soluzione. riscriviamo
$$y' = \frac{y}{x(x+1)} - 1 = 0$$
risolviamo sempre ponendo $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$
$$u'v + uv' - \frac{uv}{x(x+1)} - 1 = 0$$
raccogliendo i termini contenenti v e ponendoli uguali a zero avremo
$$v\left(u' - \tfrac{u}{x(x+1)}\right) + uv' - 1 = 0 \qquad u' - \tfrac{u}{x(x+1)} = 0$$
risolvendo per ricavare u
$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$$
risolviamo l'integrale al secondo membro scrivendolo come somma di due frazioni
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$
svolgendo e confrontando i termini di pari grado si ottiene $A = 1$ e $B = -1$, pertanto
$$\ln u = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1|$$
da cui
$$u = \frac{x}{x+1}$$
sostituendo avremo
$$\frac{x}{x+1}v' = 1$$
e risolvendo
$$\int dv = \int \frac{x+1}{x}dx = \int dx + \int \frac{dx}{x}$$
da cui
$$v = x + \ln|x| + C$$
pertanto la soluzione generale sarà
$$y = uv = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + C)$$

Esercizio 55. $\left(x^2y - x^2 + y - 1\right)dx + (xy + 2x - 3y - 6)\,dy = 0$

Soluzione. Raccogliamo a fattor comune
$$\left(x^2+1\right)(y-1)\,dx + (x-3)(y+2)\,dy = 0$$
separando le variabili e passando agli integrali, si ha
$$\int \frac{x^2+1}{x-3}dx = -\int \frac{y+2}{y-1}dy$$
risolviamo
$$\int \frac{x^2 - 6x + 9 + 6x - 8}{x-3}dx = -\int \frac{y-1}{y-1}dy + 3\int \frac{dy}{y-1}$$
$$\int (x-3)\,dx + 6\int \frac{x-3}{x-3} + 10\int \frac{dx}{x-3} = -\int dy - 3\int \frac{dy}{y-1}$$
da cui
$$\frac{x^2}{2} - 3x + 6x + 10\ln|x-3| = -y - 3\ln|y-1| + C$$
che si può scrivere
$$\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln\left|(x-3)^{10}(y-1)^3\right| = C$$

Esercizio 56. $3xdy = y\left(1 + x\sin x - 3y^3\sin x\right)dx$

Soluzione. Riscriviamo dividendo per $3xdx$ e avremo

$$y' - \frac{y}{3x} - \frac{y \sin x}{3} = -\frac{\sin x}{x} y^4 \qquad y' - \frac{y}{3}\left(\frac{1}{x} + \sin x\right) = -\frac{\sin x}{x} y^4$$

Questa equazione è del tipo $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha}$, con $\alpha = 4$. La si può trasformare in una equazione lineare mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$. Otteniamo

$$u'v + uv' - \frac{uv}{3}\left(\frac{1}{x} + \sin x\right) = -\frac{\sin x}{x} u^4 v^4$$

raccogliendo v al primo membro e uguagliando a zero per ricavare u', si ha

$$u' - \frac{u}{3}\left(\frac{1}{x} + \sin x\right) = 0$$

risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x} + \sin x\right) dx$$

cioè

$$\ln|u| = \frac{1}{3}\left(\ln|x| - \cos\right) x$$

$$u = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{\cos x}{3}}} \qquad u^4 = \frac{x\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{4\cos x}{3}}}$$

sostituiamo al posto di u la funzione trovata per ricavare v

$$\frac{e^{\frac{\cos x}{3}}}{e^{\frac{\cos x}{3}}} \frac{dv}{dx} = -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{4\cos x}{3}}} v^4$$

risolviamo ancora con il metodo delle variabili separabili e avremo

$$\int \frac{dv}{v^4} = -\int \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{4\cos x}{3}}} v^4 \cdot \frac{e^{\frac{\cos x}{3}}}{e^{\frac{\cos x}{3}}}\right) dx = \int \frac{-\sin x}{e^{\cos x}} dx$$

$$-\frac{1}{3v^3} = \int \frac{d(\cos x)}{e^{\cos x}}$$

da cui

$$-\frac{1}{3v^3} = -\frac{1}{e^{\cos x}} + C \quad e^{\cos x}$$

ma $v = \frac{y}{u}$ e sostituendo con qualche calcolo si ottiene

$$x = y^3\left(C' e^{\cos x} + 3\right)$$

Equazioni ai differenziali totali. Fattore integrante

Differenziali totali. Se per l'equazione differenziale $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ l'uguaglianza

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

è soddisfatta, l'equazione può allora essere trascritta nella forma $dU(x,y) = 0$ e si chiama *equazione ai differenziali totali.* L'integrale generale è $U(x,y) = C$.

Esercizio 57. Trova l'integrale generale dell'equazione $(x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0$

Soluzione. L'equazione è della forma $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = x + y$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = x + 2y$. Verifichiamo se

$$\tfrac{\partial P}{\partial y} = \tfrac{\partial Q}{\partial x} \qquad \tfrac{\partial(x+y)}{\partial y} = \tfrac{\partial(x+2y)}{\partial x} \qquad 1 = 1$$

Risolviamo

$$U = \int (x+y)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$$

allora derivando U rispetto a y e confrontandolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = x + 2y$ si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + 2y = x + \varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = 2y$; pertanto $\varphi(y) = y^2$. La soluzione generale sarà allora

$$\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$$

Esercizio 58. Trova l'integrale generale dell'equazione $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2xydy=0$

Soluzione. L'equazione è della forma $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ con $\frac{\partial U}{\partial x}=x^2+y^2+2x$ e $\frac{\partial U}{\partial y}=2xy$. Verifichiamo se

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad \frac{\partial\left(x^2+y^2+2x\right)}{\partial y}=\frac{\partial(2xy)}{\partial x}\qquad 2y=2y$$

Risolviamo

$$U=\int\left(x^2+y^2+2x\right)dx+\varphi(y)=\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2+\varphi(y)$$

derivando U rispetto a y e confrontandolo con $\frac{\partial U}{\partial y}=2xy$ si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2xy=2xy+\varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y)=0$; pertanto $\varphi(y)=C$. La soluzione generale sarà

$$\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$$

Esercizio 59. $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2-y^2}$

Soluzione 60. Riscriviamo l'equazione con qualche semplice passaggio algebrico

$$xdx+ydy-\frac{x}{x^2-y^2}dy+\frac{y}{x^2-y^2}dx=0\qquad \left(x+\frac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(y-\frac{x}{x^2-y^2}\right)dy=0$$

l'equazione è quindi del tipo $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ con $\frac{\partial U}{\partial x}=x+\dfrac{y}{x^2-y^2}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}=y-\dfrac{x}{x^2-y^2}$. Verifichiamo se

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+\frac{y}{x^2-y^2}\right)=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y-\frac{x}{x^2-y^2}\right)=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

Risolviamo

$$U=\int\left(x+\frac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\varphi(y)=$$
$$=\int xdx+y\int\frac{y}{x^2-y^2}dx+\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+\varphi(y)$$

derivando U rispetto a y e confrontandolo con $\frac{\partial U}{\partial y}=y-\frac{x}{x^2-y^2}$ si ha

$$y-\frac{x}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{-2x}{(x+y)^2}+\varphi'(y)=-\frac{x}{x^2-y^2}+\varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y)=y$ e $\varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C$. La soluzione generale sarà

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|=C$$

Esercizio 61. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

Soluzione. l'equazione è nella forma $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ con $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$. Verifichiamo se è un integrale totale

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right)=-\frac{6x}{y^4}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)=-\frac{6x}{y^4}$$

Risolviamo

$$U=\int\frac{2x}{y^3}dx+\varphi(x)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$$

Deriviamo U rispetto a y e confrontiamolo con $\frac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$, avremo

$$\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$ e $\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C$. La soluzione generale sarà
$$x^2 - y^2 = Cy^3$$

Esercizio 62. Trovare l'integrale particolare dell'equazione
$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$
che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$.

Soluzione. l'equazione è nella forma $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = x + e^{\frac{x}{y}}$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$. Verifichiamo se è un integrale totale
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\right] = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$
Risolviamo
$$U = \int \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + \varphi(y)$$
Deriviamo U rispetto a y e confrontiamolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$, avremo
$$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} - y \cdot \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + \varphi'(y)$$
da cui $\varphi'(y) = 0$ e $\varphi(y) = C_0$. La soluzione generale sarà
$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$$
introducendo le sostituzioni indicate, possiamo ricavare C e quindi la soluzione particolare
$$0 + 2 \cdot 1 = C$$
$$x^2 = 4 - 2ye^{\frac{x}{y}}$$

Fattore integrante. Se il primo membro dell'equazione $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ non è un differenziale totale e se le condizioni del teorema di Cauchy sono soddisfatte, allora esiste una funzione $\mu = \mu(x,y)$ (fattore integrante) tale che
$$\mu(Pdx + Qdy) = dU$$
Se ne deduce che la funzione μ soddisfa l'equazione
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$
Il fattore integrante μ si trova nei due casi seguenti
$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x) \quad allora \quad \mu = \mu(x)$$
$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(x) \quad allora \quad \mu = \mu(y)$$

Esercizio 63. Integrare l'equazione
$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(x^2 + y^2\right) dy = 0$$

Soluzione. In questo caso $P(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$ e $Q(x,y) = x^2 + y^2$. Le due derivate, la prima rispetto a y e la seconda rispetto a x non sono uguali e l'equazione non rappresenta un differenziale esatto.
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$
Calcoliamo
$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(2x + x^2 + y^2 - 2x\right) = 1,$$
allora avremo $\mu = \mu(x)$. Si ha allora, dipendendo μ da x
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx = dx$$

e
$$\ln\mu = x$$
da cui
$$\mu = e^x$$
moltiplichiamo ora l'equazione data per e^x e avremo
$$\left[e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\right]dx + \left[e^x\left(x^2+y^2\right)\right]dy = 0$$
che è l'equazione ai differenziali totali. Infatti
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^x + x^2e^x + e^xy^2 = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right)$$
Avremo
$$\tfrac{\partial U}{\partial x} = e^x\left(2xy + x^2y + \tfrac{y^3}{3}\right) \qquad \tfrac{\partial U}{\partial y} = e^x\left(x^2+y^2\right)$$
per cui
$$U = \int e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \varphi(y) = \int 2xye^x dx + \int x^2ye^x + \int e^x\frac{y^3}{3}dx + \varphi(y)$$
i primi due integrali si possono risolvere per parti ponendo $e^xdx = v'$ e $2x = u$ (1° caso) $x^2 = u$ (2° caso)
$$\int 2xye^x dx = 2xye^x - 2ye^x$$
$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2ye^x - 2xye^x + 2ye^x$$
per cui
$$U = 2yxe^x - 2ye^x + x^2ye^x - 2xye^x + 2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(y) = x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(y)$$
Deriviamo U rispetto a y e confrontiamolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = e^x\left(x^2+y^2\right)$,
$$e^x\left(x^2+y^2\right) + \varphi'(y) = e^x\left(x^2+y^2\right)$$
da cui
$$\varphi'(y) = 0 \qquad \varphi(y) = C_0$$
e la soluzione generale sarà
$$C = e^xy\left(x^2 + \frac{y^3}{3}\right)$$
Equazioni differenziali del 1° ordine non risolvibili rispetto alla derivata

Equazioni del primo ordine di gradi superiori

Se l'equazione $F(x,y,y') = 0$ è, per esempio, di secondo grado rispetto a y', allora risolvendo l'equazione come una comune equazione di secondo grado, si ottengono due equazioni
$$y' = f_1(x,y) \quad y' = f_2(x,y)$$
L'integrale generale dell'equazione ha in questo caso la forma
$$\Phi(x,y,C) = \Phi_1(x,y,C)\cdot\Phi_2(x,y,C) = 0$$
Esercizio 64. Trovare l'integrale generale e particolare dell'equazione
$$xy'^2 + 2xy' - y = 0$$
Soluzione. Risolviamo prima trattandola come un'equazione algebrica di 2° grado rispetto a y'. Avremo
$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+xy}}{x} = -1 \pm \sqrt{\frac{x^2+xy}{x}}$$
avremo pertanto le due soluzioni
$$y' = -1 + \sqrt{\tfrac{x^2+xy}{x}} \quad y' = -1 - \sqrt{\tfrac{x^2+xy}{x}}$$
Le due soluzioni così ottenute sono equazioni differenziali omogenee e le risolviamo sostituendo $y = ux$ e $y' = u + xu'$ (risolviamo tecnicamente solo la prima, essendo la procedura per la seconda identica a parte un segno)
$$u + x\frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{1+u}$$

separando le variabili

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{-(1+u)+\sqrt{1+u}}$$

applichiamo la seguente ulteriore sostituzione: $1+u=t^2$, $du=2tdt$ e avremo

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2t}{t(1-t)}dt = -2\int \frac{dt}{t-1}$$

da cui

$$\ln x = \ln \frac{C}{(t-1)^2} = \quad \ln \frac{C}{\left(\sqrt{u+1}-1\right)^2} \quad x = \frac{C}{\left(\sqrt{u+1}-1\right)^2}$$

Avremo quindi, sostituendo nuovamente $u=\frac{y}{x}$, le due soluzioni

$$\tfrac{C}{x} = \left(\sqrt{1+\tfrac{y}{x}}-1\right)^2 \qquad \tfrac{C}{x} = \left(\sqrt{1+\tfrac{y}{x}}+1\right)^2$$

Svolgendo i quadrati e moltiplicando si ottiene

$$\Phi(x,y,C) = \left[(2x+y-C)-2\sqrt{x^2+xy}\right]\left[(2x+y-C)+2\sqrt{x^2+xy}\right] = 0$$

$$\Phi(x,y,C) = (2x+y-C)^2 - 4\left(x^2+xy\right) = 0$$

svolgendo il quadrato, sommando e applicando il prodotto notevole

$$(y-C)^2 = 4Cx$$

questa soluzione generale rappresenta un fascio di parabole.

Troviamo la soluzione particolare derivando rispetto a C

$$-2(y-C) = 4x \quad -2y+2C = 4x \quad C = 2x+y$$

sostituiamo il valore trovato nella soluzione generale

$$4x^2 = 4x(2x+y)\,da$$

cui

$$y+x=0$$

È possibile risolvere anche utilizzando un altro metodo, cioè mediante la sostituzione $y'=p$, come mostrato di seguito.

Esercizio 65. Trovare l'integrale generale e quello particolare dell'equazione differenziale

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y'=p$ e avremo

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$$

e deriviamo poi rispetto a x e consideriamo $p=f(x)$

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x$$

raccogliamo e con qualche calcolo, si ha

$$(2p-x)\tfrac{dp}{dx} = 2p-x \quad \tfrac{dp}{dx} = 1 \quad p = x+C$$

sostituiamo $y'=x+C$ e avremo

$$y = (x+C)^2 - x(x+C) + \frac{x^2}{2}$$

da cui

$$y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2}$$

troviamo la soluzione particolare derivando rispetto a C

$$0 = x+2C \quad C = -\tfrac{x}{2}$$

sostituendo avremo

$$y = -\frac{x}{2}\left(x-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \quad y = \frac{x^2}{4}$$

Esercizio 66. Risolvi la seguente equazione differenziale determinando il suo integrale generale

$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2$$

Soluzione. Svolgiamo qualche calcolo

$$y^2 + y^2y'^2 = x^2y'^2 + y^2 - 2xyy' \quad y^2y'^2 - x^2y'^2 + 2xyy' = 0$$

raccogliamo

$$y'\left[y'\left(y^2 - x^2\right) + 2xy\right] = 0$$

può essere considerata con caratteristiche riconducibili a un'equazione spuria di secondo grado, per cui $y' = 0$ restituisce una costante, mentre

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

è una equazione differenziale omogenea; sostituiamo pertanto $y = ux$ e $y' = u + xu'$,

$$u + xu' = \frac{2ux^2}{x^2\left(1 - u^2\right)} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2}$$

integrando con il metodo delle variabili separabili si ha

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1 - u^2}{u + u^3}du$$

calcoliamo l'integrale al secondo membro

$$\int \frac{1 - u^2}{u + u^3}du = \int \frac{1 + 3u^2 - 4u^2}{u + u^3}du = \int \frac{1 + 3u^2}{u + u^3}du - \frac{4}{2}\int \frac{2u}{1 + u^2}du =$$

$$\ln\left|u + u^3\right| - 2\ln\left|1 + u^2\right| = \ln\left|\frac{u}{1 + u^2}\right|$$

Ritornando all'equazione differenziale, avremo

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{u}{1 + u^2}\right| + \ln C$$

da cui

$$C = \frac{x\left(1 + u^2\right)}{u}$$

e sostituendo $u = \frac{y}{x}$, avremo, dopo qualche calcolo algebrico

$$x^2 + y^2 - Cy = 0$$

un fascio di circonferenze di centro $\left(0; \frac{C}{2}\right)$ e raggio variabile $r = \frac{C}{2}$.

Esercizio 67. Trovare l'integrale generale e particolare dell'equazione

$$4y'^2 - 9x = 0$$

Soluzione. Risolviamo come un'equazione di 2° grado. Avremo

$$y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

le due soluzioni saranno

$$y' = \tfrac{3}{2}\sqrt{x} \quad y' = -\tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

risolvendo con il metodo delle variabili separabili si ha

$$\textstyle\int dy = \frac{3}{2}\int\sqrt{x} \qquad \int dy = \frac{3}{2} - \int\sqrt{x}$$

le soluzioni saranno pertanto

$$x\sqrt{x} - y + C = 0 \qquad x\sqrt{x} + y - C = 0$$

moltiplicando avremo

$$x^3 = y^2 + 2Cy + C^2$$

da cui

$$x^3 = (y + C)^2$$

troviamo la soluzione particolare derivando rispetto a C

$$0 = 2\,(y + C) \qquad C = -y$$

quindi non abbiamo integrale singolare.

Esercizio 68. Trovare l'integrale generale dell'equazione $yy'^2 - (xy + 1)\,y' + x = 0$

Soluzione. Risolviamo come un'equazione di 2° grado. Avremo

$$y' = \frac{(xy+1) \pm \sqrt{(xy+1)^2 - 4xy}}{2y} = \frac{(xy+1) \pm (xy-1)}{2y}$$

avremo quindi due soluzioni del tipo

$$y' = x \quad y' = \tfrac{1}{y}$$

Risolviamo le due equazioni con il metodo delle variabili separabili

$$y = \frac{x^2}{2} + C \qquad \frac{y^2}{2} = x + C$$

oppure

$$\frac{x^2}{2} - y + C = 0 \qquad x - \frac{y^2}{2} + C = 0$$

moltiplichiamo e avremo la soluzione generale

$$\left(\frac{x^2}{2} - y + C\right)\left(x - \frac{y^2}{2} + C\right) = 0$$

Esercizio 69. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y = y'^2 e^{y'}$

Soluzione. Risolviamo introducendo la sostituzione $y' = p$; avremo $y = p^2 e^p$; deriviamo ora rispetto a x con $p = f(x)$

$$p = 2p\frac{dp}{dx}e^p + p^2 e^p \frac{dp}{dx}$$

raccogliamo

$$\frac{dp}{dx}(2pe^p + p2)\, e^p = p$$

dividiamo entrambi i membri per p e separiamo le variabili

$$dp\,(2e^p + pe^p) = dx$$

integrando

$$\int 2e^p dp + \int pe^p dp = \int dx$$

il secondo integrale a sinistra si può risolvere per parti e avremo, scrivendo le soluzioni in forma parametrica, mediante il parametro p

$$2e^p + pe^p - e^p + C = x$$
$$y = p^2 e^p$$

Esercizio 70. Trovare l'integrale generale dell'equazione $x = \sin y' + \ln y'$

Soluzione. Risolviamo introducendo la sostituzione $y' = p$; avremo $x = \sin p + \ln p$; deriviamo ora rispetto a x con $p = f(x)$

$$1 = \cos p\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

sostituiamo $dx = \frac{dy}{p}$ e avremo

$$1 = \cos p\frac{dp}{dy}p + \frac{1}{p}\frac{dp}{dy}p$$

da cui

$$dy = (p\cos p + 1)\, dp$$

e integrando, utilizzando anche l'integrazione per parti

$$y = p\sin p - \int \sin p dp + p + C$$

scrivendo le soluzioni in forma parametrica, avremo

$$y = p\sin p + \cos p + p + C$$
$$x = \sin p + \ln p$$

Esercizio 71. $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}}dy - \sqrt{\frac{y}{x}}dx = 0$

Soluzione. Moltiplichiamo tutto per $\sqrt{\frac{y}{x}}$ e avremo

$$2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$$

da cui

$$y'=\frac{y}{x}-2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

introduciamo la sostituzione $y=ux$ e $y'=u+xu'$ e otteniamo

$$u+xu'=u-2\sqrt{u}$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$-\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

cioè

$$\ln|x|+\sqrt{\frac{y}{x}}=C$$

Esercizio 72. $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y=ux$ e $y'=u+xu'$ e otteniamo

$$u+xu'=u+\tan u$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{\tan u}\qquad\int\frac{dx}{x}=\int\frac{\cos u}{\sin u}du$$

cioè

$$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right|=\ln C+\ln|x|$$

che si può riscrivere

$$y=x\arcsin\left(Cx\right)$$

Esercizio 73. $2dx+\sqrt{\frac{x}{y}}dy-\sqrt{\frac{y}{x}}dx=0$

Soluzione. Moltiplichiamo entrambi i membri per $\sqrt{\frac{y}{x}}$ e otterremo

$$2\sqrt{\frac{y}{x}}dx+dy-\frac{y}{x}dx=0$$

dividiamo tutto per dx

$$2\sqrt{\frac{y}{x}}+y'-\frac{y}{x}=0$$

ca cui

$$y'=\frac{y}{x}-2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Poniamo $y=ux$ e $y'=u+xu'$ e avremo

$$\cancel{u}+xu'=\cancel{u}-2\sqrt{u}$$

cioè, passando poi agli integrali

$$-\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}$$

risolvendo

$$\ln|x|=-\sqrt{u}+C$$

e poiché $u=\frac{y}{x}$, avremo

$$\ln|x|+\sqrt{\frac{y}{x}}=C$$

Esercizio 74. $yy'+y^2=\cos x$

Soluzione. Impostiamo la risoluzione ponendo $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$
$$uv\left(u'v + uv'\right) + u^2v^2 = \cos x$$
raccogliamo i termini contenenti la variabile v e avremo
$$v\left(u' + u\right) + uv' = \frac{\cos x}{uv}$$
per ricavare u
$$u' + u = 0$$
cioè
$$\int \frac{du}{u} = -\int dx \quad \ln u = -x \quad u = e^{-x}$$
l'equazione diventa
$$e^{-x}v' = \frac{\cos x}{ve^{-x}}$$
separando le variabili e integrando si ha
$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} = \frac{\cos x}{v} \quad \int vdv = \int \frac{\cos x}{v} \quad \frac{v^2}{2} = \int \cos xe^{2x}dx$$
risolviamo l'integrale per parti
$$\int \cos xe^{2x}dx = \sin xe^{2x} - 2\int \sin xe^{2x}dx =$$
$$= \sin xe^{2x} - 2\left[-\cos xe^{2x} + 2\int \cos xe^{2x}dx\right]$$
per cui
$$\int \cos xe^{2x}dx = \sin xe^{2x} + 2\cos xe^{2x} - 4\int \cos xe^{2x}dx$$
cioè
$$\int \cos xe^{2x}dx = \frac{\sin xe^{2x} + 2\cos xe^{2x}}{5} + C$$
avremo, tornando all'equazione differenziale,
$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{5}\sin xe^{2x} + \frac{2}{5}\cos xe^{2x} + C'$$
da cui
$$v = e^x\sqrt{\frac{1}{5}\left(\sin x + 2\cos x\right) + Ce^{-2x}}$$
Essendo $y = uv$, avremo
$$y = e^{-x}\cdot\left(e^x\sqrt{\frac{1}{5}\left(\sin x + 2\cos x\right) + Ce^{-2x}}\right)$$
da cui
$$y^2 = \frac{1}{5}\left(\sin x + 2\cos x\right) + Ce^{-2x}$$

Esercizio 75. $y\frac{dp}{dy} = -p + p^2$

Soluzione. l'equazione si può riscrivere, separando le variabili come
$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p^2 - p} = \frac{dp}{p\left(p-1\right)}$$
e passando agli integrali
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dp}{p\left(p-1\right)}$$
risolviamo l'integrale al secondo membro
$$\frac{1}{p\left(p-1\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1}$$
cioè
$$1 = p\left(A + B\right) - A$$
da cui $A + B = 0$ e $A = -1$, e quindi $A = -1$ e $B = 1$, e si ha
$$\ln|y| = -\int \frac{dp}{p} + \int \frac{dp}{p-1} = \ln|p| + \ln|p-1| + \ln|C|$$

cioè

$$\ln Cy = \ln \frac{p-1}{p}$$

e le soluzioni si possono scrivere

$$yp = C\,(p-1)$$

Esercizio 76. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

Soluzione. La derivata prima è presente anche con grado 2, e possiamo dapprima procedere come per le equazioni di secondo grado in modo da scomporla nel prodotto di due fattori dove la derivata prima sarà solo di primo grado. Applichiamo quindi la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$y' = \frac{-3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 8x^2y^2}}{2x^2} = \frac{-3xy \pm xy}{2x^2}$$

avremo quindi

$$y_1' = -2\frac{y}{x} \quad y_2' = -\frac{y}{x}$$

risolviamo le due equazioni, cominciando dalla prima

$$\tfrac{dy_1}{dx} = -2\tfrac{y}{x} \quad \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{x} = -\int \tfrac{dx}{x} \quad \ln y + 2\ln x = \ln C \quad C = xy^2$$

nel secondo caso

$$\tfrac{dy_2}{dx} = -\tfrac{y}{x} \quad \int \tfrac{dx}{x} = -\int \tfrac{dx}{x} \quad \ln y + \ln x = \ln C \quad C = xy$$

moltiplicando le due soluzioni avremo

$$\left(x^2y - C\right)(xy - C) = 0$$

Esercizio 77. $e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$

Soluzione. Abbiamo $P\,(x,y) = e^y$ e $Q\,(x,y) = xe^y - 2y$; osservo che si tratta di un differenziale totale poiché $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Allora l'equazione ha la forma $dU = 0$. Si ha

$$\tfrac{\partial U}{\partial x} = e^y \quad \tfrac{\partial U}{\partial y} = xe^x - 2y$$

d'onde

$$U = \int e^y dx + \varphi\,(y) = xe^y + \varphi\,(y)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xe^x + \varphi'\,(y)$$

e confrontando avremo

$$xe^y + \varphi'\,(y) = xe^x - 2y$$

da cui

$$\varphi'\,(y) = -2y \quad \varphi\,(y) = -y^2 + C$$

la soluzione sarà

$$C = xe^y - y^2$$

Esercizio 78. $y' = \frac{y}{x}\,(1 + \ln y - \ln x)$

Soluzione. Ricordando le proprietà dei logaritmo, possiamo riscrivere l'equazione

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$$

e poniamo $y = ux$ e $y' = u + xu'$, avremo

$$u + xu' = u\,(1 + \ln u)$$

cioè

$$x\frac{du}{dx} = u \ln u$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{\ln u}$$

ma $\frac{du}{u} = d\,(\ln u)$, e si ottiene

$$\ln x = \int \frac{d\,(\ln u)}{\ln u} = \ln\,(\ln u)$$

da cui

$$x = \ln u + C$$

ma $u = \frac{y}{x}$, per cui

$$x = \ln \frac{y}{x} + C$$

che si può anche mettere nelle forma

$$y = xe^{x-C}$$

Esercizio 79. $xdy - ydx = y^2dx$

Soluzione. riscriviamo, raccogliendo i termini contenenti dx

$$xdy = y\left(y+1\right)dx$$

e separiamo le variabili, passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y\left(y+1\right)} = \int \frac{dx}{x}$$

risolviamo l'integrale a primo membro scomponendo la frazione nella somma di due frazioni con denominatore di primo grado

$$\frac{1}{y\left(y+1\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$$

da cui, moltiplicando per il denominatore comune e confrontando i termini di pari grado, si ottiene $A = 1$ e $B = -1$; la nostra equazione diviene pertanto

$$\ln x = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{|y|}{|y+1|} + \ln C$$

cioè

$$x = \frac{Cy}{y+1}$$

o

$$x + \frac{x}{y} = C$$

Esercizio 80. $\tan x \frac{dy}{dx} - yx = a$

Soluzione. separiamo le variabili

$$\frac{dy}{a+y} = \frac{dx}{\tan x}$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{a+y} = \int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

ma $\cos x$ è la derivata di $\sin x$, per cui avremo,

$$\ln|a+y| = \ln|\sin x| + \ln C$$

da cui

$$y = C\sin x - a$$

Esercizio 81. $xyy'^2 - \left(x^2+y^2\right)y' + xy = 0$

Soluzione. La derivata prima è presenta anche elevata al quadrata, e l'equazione può essere affrontata preliminarmente come un'equazione di secondo grado nella variabile y'. Risolvendo

$$y' = \frac{\left(x^2+y^2\right) \pm \sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2}}{2xy} = \frac{\left(x^2+y^2\right) \pm \left(x^2-y^2\right)}{2xy}$$

le soluzioni sono

$$y_1^{'} = \frac{x}{y} \quad y_2^{'} = \frac{y}{x}$$

risolviamo ora le due equazioni differenziali separatamente, iniziando dalla prima

$$\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{x}{y} \quad \int ydy = \int xdx \quad \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + C' \quad y^2 - x^2 + C = 0$$

ora la seconda

$$\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{y}{x} \quad \int \tfrac{dy}{y} = \int \tfrac{dx}{x} \qquad y - Cx = 0$$

moltiplicando le due soluzioni, si ottiene

$$\left(y^2 - x^2 + C\right)\left(y - Cx\right) = 0$$

Esercizio 82. $\left(3x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-3y^2\right)dy=0$

Soluzione. anche questo è un differenziale esatto, per cui

$$P(x,y)=3x^2+2xy-y^2=\frac{\partial U}{\partial x}\qquad Q(x,y)=x^2-2xy-3y^2=\frac{\partial U}{\partial y}$$

risolvendo

$$U=\int\left(3x^2+2xy-y^2\right)dx+\varphi(y)=x^3+x^2y-xy^2+\varphi(y)$$

derivando poi rispetto a y e confrontando, si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-2xy+x^2+\varphi'(y)=x^2-2xy-3y^2$$

da cui

$$\varphi'(y)=-3y^2\qquad\varphi(y)=-y^3+C$$

la soluzione sarà

$$x^3+x^2y-xy^2-y^3=C$$

Esercizio 83. $2yp\frac{dp}{dy}=3p^2+4y^2$

Soluzione. dividiamo per y^2 e avremo

$$2\frac{p}{y}\frac{dp}{dy}=3\frac{p^2}{y^2}+4$$

poniamo $p=uy$ e $p'=u+yu'$

$$2u\left(u+yu'\right)=3u^2+4\quad 2u^2+2uyu'=3u^2+4\quad 2uyu'=u^2+4$$

separiamo le variabili e passiamo agli integrali

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2u}{u^2+4}du$$

che dà

$$\ln Cy=\ln\left(u^2+4\right)\qquad Cy=u^2+4$$

da cui, ritornando alle variabili iniziali

$$Cy^3=p^2+4y^2$$

Esercizio 84. $y'=\dfrac{y+1}{x}$ con $y=0$ per $x=1$.

Soluzione. riscriviamo

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{x}$$

e poniamo $y=ux$ e $y'=u+xu'$

$$u+xu'=u+\tfrac{1}{x}\qquad\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}$$

passando agli integrali e risolvendo, si ha

$$\int du=\int\frac{dx}{x^2}\quad u=-\tfrac{1}{x}+C\quad \tfrac{y}{x}=-\tfrac{1}{x}+C$$

cioè $y=Cx-1$; introducendo le condizioni fissate si ottiene

$$0=-1+C\quad C=1\quad y=x-1$$

Esercizio 85. $e^{x-y}y'=1$ con $y=1$ per $x=1$.

Soluzione. applicando le proprietà delle potenze possiamo scrivere

$$\frac{e^x}{e^y}y'=1$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int\frac{dx}{e^x}=\int\frac{dy}{e^y}\quad\int e^{-x}dx=\int e^{-y}dy\quad -e^{-x}=-e^{-y}+C$$

imponendo le condizioni si ha $e^{-1}=e^{-1}+C$, da cui $C=0$ e la soluzione è

$$x=y$$

Esercizio 86. $y'-2y+x^2=0$ con $y=\frac{1}{4}$ per $x=0$.

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$ e otteniamo

$$u'v + uv' - 2uv + x^2 = 0$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v

$$v\left(u' - 2u\right) + uv' + x^2 = 0$$

ricaviamo u'

$$u' - 2u = 0 \quad \tfrac{du}{2u} = dx \quad u = e^{2x}$$

l'equazione diviene

$$e^{2x}v' + x^2 = 0$$

e risolvendo separando le variabili

$$-\int dv = \int \frac{x^2}{e^{2x}}dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti

$$\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int 2xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

pertanto

$$y = uv = e^{2x} \cdot e^{-2x}\left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{4}\right) + Ce^{2x}$$

applicando la condizioni assegnate si ha

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + C \quad C = 0$$

e la soluzione particolare sarà

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{4}$$

Esercizio 87. $y' - 2y + x^2 = 0$ con $y = \frac{1}{4}$ per $x = 0$.

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$ e otteniamo

$$u'v + uv' - 2uv + x^2 = 0$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v

$$v\left(u' - 2u\right) + uv' + x^2 = 0$$

ricaviamo u'

$$u' - 2u = 0 \quad \tfrac{du}{2u} = dx \quad u = e^{2x}$$

l'equazione diviene

$$e^{2x}v' + x^2 = 0$$

e risolvendo separando le variabili

$$-\int dv = \int \frac{x^2}{e^{2x}}dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti

$$\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int 2xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

pertanto

$$y = uv = e^{2x} \cdot e^{-2x}\left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{4}\right) + Ce^{2x}$$

applicando la condizioni assegnate si ha

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + C \quad C = 0$$

e la soluzione particolare sarà

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{4}$$

Esercizio 88. $y' + y = 2x$ con $y = -1$ per $x = 0$.

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$ e otteniamo

$$u'v + uv' + uv = 2x$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v

$$v\left(u' + u\right) + uv' = 2x$$

ricaviamo u'

$$u' + u = 0 \quad \frac{du}{u} = -dx \quad u = e^{-x}$$

l'equazione diviene

$$e^{-x}\frac{dv}{dx} = 2x$$

e risolvendo separando le variabili

$$\int dv = \int 2xe^{x}dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti

$$v = \int 2xe^{x}dx = 2xe^{x} - 2\int e^{x}dx = 2xe^{x} - 2e^{x} + C$$

pertanto

$$y = uv = e^{-x}\left(2xe^{x} - 2e^{x} + C\right) = 2x - 2 + Ce^{-x}$$

applicando la condizioni assegnate si ha

$$-1 = -2 + C \quad C = 1$$

e la soluzione particolare sarà

$$y = 2x - 2 + e^{-x}$$

Esercizio 89. $xy' = y$ con $y = 1$ per $x = 1$.

Soluzione. riscriviamo nella forma

$$y' = \frac{y}{x}$$

e introduciamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$; l'equazione diviene

$$u + xu' = u \quad x\frac{du}{dx} = 0 \quad u = C$$

cioè

$$u = C \quad \frac{y}{x} = C \quad y = Cx$$

applichiamo la condizione

$$1 = C \quad y = x$$

Esercizio 90. $y'\cot x + y = 2$ con $y = 2$ per $x = 0$.

Soluzione. riscriviamo

$$\frac{dy}{dx}\cot x = 2 - y$$

e separiamo le variabili, passando poi agli integrali

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{dx}{\cot x} \quad -\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

da cui

$$-\ln|y-2| = -\ln C\left|\cos x\right|$$

cioè

$$y = 2 - C\cos x$$

introduciamo i valori assegnati per ottenere la soluzione particolare

$$y - 2 = C \quad C = 0$$

cioè $y = 2$.

Esercizio 91. $y' + y = \cos x$ con $y = \frac{1}{2}$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y = uv$, $y' = uv' + u'v$ e avremo
$$uv' + u'v + uv = \cos x$$
raccogliamo i termini contenenti v, e avremo $v\,(u' + u) + uv' = \cos x$; ricaviamo u
$$u' + u = 0 \quad \tfrac{du}{u} = -dx \quad u = e^{-x}$$
si avrà
$$e^{-x}v' = \cos x \quad \tfrac{dv}{dx} = e^{x}\cos x \quad \textstyle\int dv = \int e^{x}\cos x dx$$
risolviamo l'integrale a secondo membro per parti
$$\int e^{x}\cos x dx = e^{x}\cos x + \int e^{x}\sin x dx = e^{x}\cos x + e^{x}\sin x - \int e^{x}\cos x dx$$
quindi
$$2\int e^{x}\cos x dx = e^{x}\cos x + e^{x}\sin x + C$$
ora, $y = uv$, per cui
$$y = e^{-x}\cdot\frac{e^{x}}{2}(\sin x + \cos x) + Ce^{-x} = \frac{\sin x + \cos x}{2} + Ce^{-x}$$
ricaviamo la soluzione particolare
$$\tfrac{1}{2} + C = \tfrac{1}{2} \quad C = 0$$
e la soluzione è
$$y = \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

4. Equazioni differenziali di ordine superiore

La soluzione di queste equazioni passa soprattutto nell'abbassamento del loro ordine mediante una sostituzione del tipo $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$ qualora nell'equazione compaia la sola variabile y. Vi sono anche equazione a soluzione immediata come nell'esercizio che segue:

Esercizio 92. $y" = \dfrac{1}{x}$.

Soluzione. $y' = \ln|x| + C_1$, e $y = x\ln|x| - x + C_1x + C_2$

Esercizio 93. $y" = -\dfrac{1}{2y^3}$

Soluzione. poniamo $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$, da cui
$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{2y^3}$$
e separando le variabili
$$pdp = -\frac{dy}{2y^3} = -\frac{1}{2}y^{-3}dy$$
passando agli integrali
$$\textstyle\int pdp = -\frac{1}{2}\int y^{-3}dy \quad \frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2}\int y^{-3}dy \quad p^2 = \frac{1}{2y^2} + C_1$$
da cui
$$y'^2 - \left(\tfrac{1}{2y^2} + C_1\right) = 0 \quad \left(y' - \sqrt{\tfrac{1}{2y^2} + C_1}\right)\left(y' + \sqrt{\tfrac{1}{2y^2} + C_1}\right) = 0$$
risolviamo il primo fattore
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1 + 2C_1y^2}{y^2}}$$
da cui
$$\textstyle\int\sqrt{\frac{y^2}{1+2C_1y^2}}dy = \int\frac{dx}{\sqrt{2}} \quad \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2C_1}\int\frac{2C_1y}{\sqrt{1+2C_1y^2}}dy$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}C_1}\sqrt{1 + 2C_1y^2} + C_2$$

Esercizio 94. $x^2y" + xy' = 1$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e avremo

$$x^2 p' + xp = 1$$

introduciamo una nuova sostituzione: $p = uv$ e quindi $p' = u'v + uv'$; otterremo

$$x^2 \left(u'v + uv'\right) + uvx = 1$$

cioè

$$x^2 u'v + x^2 uv' + uvx = 1$$

raccogliendo i termini contenenti v e ponendo uguale a zero, abbiamo

$$v\left(x^2 u' + ux\right) + x^2 uv' = 1$$

$$x^2 u' + ux = 0$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \quad u = \frac{1}{x}$$

sostituendo nell'equazione $x^2 uv' = 1$

$$xv' = 1$$

da cui

$$v = \ln x + C_1$$

ma essendo $p = uv$, e $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ln x + \frac{C_1}{x}$$

ossia

$$y = \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{C_1}{x} dx = \int \ln x \left(d \ln x\right) + C_1 \ln|x| + C_2$$

da cui

$$y = \frac{1}{2}\left|\ln x\right| + C_1 \ln|x| + C_2$$

Esercizio 95. $yy" = y^2 y' + y^{'2}$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$; l'equazione infatti non contiene termini in x

$$yp\frac{dp}{dy} = y^2 p + p^2$$

dividendo per py

$$\frac{dp}{dy} = y + \frac{p}{y}$$

e introducendo la nuova sostituzione $p = uy$, $p' = u + yu'$, avremo

$$u + yu' = y + u$$

da cui $u' = 1$ e $u = y + C_1$, $p = y^2 + C_1 y$; ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 y \qquad \int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} \int dx \quad x = \int \frac{dy}{y\left(y + C_1\right)}$$

risolviamo questo integrale

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y\left(y + C_1\right)} = \frac{1}{y\left(y + C_1\right)}$$

da cui $Ay + AC_1 + By = 1$, che dà

$$A = \frac{1}{C_1} \quad B = -\frac{1}{C_1}$$

e quindi

$$x = \frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{y + C_1} = \frac{1}{C_1}\ln|y| - \frac{1}{C_1}\ln|C_1 + y| + C - 2$$

ossia

$$x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{C_1 + y}\right| + C_2$$

Esercizio 96. $yy" - y'\left(1 + y'\right) = 0$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$; l'equazione infatti non contiene termini in x

$$yp\frac{dp}{dy} - p(1+p) = 0$$

dividendo per py

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y} - \frac{p}{y} = 0$$

e introducendo la nuova sostituzione $p = uy$, $p' = u + yu'$, avremo

$$u + yu' - \frac{1}{y} - u = 0$$

da cui $u' = \frac{1}{y^2}$ e $u = -\frac{1}{y} + C_1$, per cui $p = -1 + C_1 y$; ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1 \quad x = \int \frac{dy}{C_1 y - 1}$$

ossia

$$x = \ln |C_1 y - 1| + C_2$$

Esercizio 97. $y" = -\dfrac{x}{y'}$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p'$;

$$p' = -\frac{x}{p}$$

ossia

$$p\frac{dp}{dx} = -x$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$pdp = -xdx \quad \int pdp = -\int xdx$$

da cui

$$\frac{p^2}{2} = -\tfrac{x^2}{2} + C_0 \quad p = \pm\sqrt{C_1 - x^2}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - x^2}$$

da cui

$$dy = \pm\sqrt{C_1 - x^2}dx \quad y = \pm\int \sqrt{C_1 - x^2}dx$$

risolviamo l'integrale con la sostituzione $x = \sqrt{C_1}\sin t$, e $dx = \sqrt{C_1}\cos t dt$,

$$y = \pm\int \sqrt{C_1\left(1 - \sin^2 t\right)}\cos t dt = \pm\sqrt{C_1}\int \cos^2 t dt$$

e applicando le formule di bisezione

$$y = \pm\sqrt{C_1}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \pm\sqrt{C_1}\left(\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt\right) = \pm\sqrt{C_1}\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C_2$$

ma $t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}}$

$$y = \pm\sqrt{C_1}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}} + \frac{x}{C_1}\sqrt{C_1 - x^2}\right) + C_2$$

Esercizio 98. $xy" = y'\ln\dfrac{y'}{x}$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p'$;

$$xp' = p \ln \frac{p}{x}$$

e dividendo per x

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$$

questa equazione, abbassata di grado, si può risolvere ponendo $\frac{p}{x} = u$ e $p' = u + xu'$

$$u + xu' = u \ln u \quad x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1) \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u(\ln u - 1)}$$

passando agli integrali

$$\ln|x| = \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{d(\ln u)}{(\ln u - 1)} = \ln(\ln u - 1) + \ln C_1$$

da cui

$$x = C_1 \ln u - C_1$$

ma $u = \frac{p}{x}$

$$x = C_1 \ln \tfrac{p}{x} - C_1 \quad x + C_1 = C_1 \ln \tfrac{p}{x} \quad \tfrac{x}{C_1} + 1 = \ln \tfrac{p}{x}$$

cioè

$$e^{\frac{x}{C_1}+1} = \frac{p}{x}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabile e passando agli integrali

$$y = \int xe^{\frac{x}{C_1}} dx$$

e integrando per parti

$$y = C_1 e^{\frac{x}{C_1}+1}(x - C_1) + C_2$$

Esercizio 99. Trovare la soluzione particolare di $\left(1 + x^2\right) y" - 2xy' = 0$ con $y = 0$, $y' = 3$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p'$;

$$\left(1 + x^2\right) p' - 2xp = 0 \quad p' - \frac{2x}{x^2+1} p = 0$$

questa è un'equazione differenziale omogenea di primo grado

$$p = C_1 e^{+\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = C_1 e^{\ln\left(x^2+1\right)} = C_1 \left(x^2 + 1\right)$$

ma $p = y' = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \left(x^2 + 1\right) \quad \int dy = C_1 \int \left(x^2 + 1\right) dx$$

e quindi

$$y = C_1 \left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2$$

troviamo il valore di C_1, imponendo la condizione assegnata

$$3 = C_1$$

troviamo ora C_2

$$0 = 3\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2$$

cioè

$$C_2 = 0$$

e la soluzione particolare è

$$y = x^3 + 3x$$

Esercizio 100. Trovare la soluzione particolare di $1 + y^{'2} = 2yy" = 0$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = 1$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$1 + p^2 = 2yp\frac{dp}{dy} \quad \frac{1 + p^2}{p} = 2y\frac{dp}{dy}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{2p}{1 + p^2}dp$$

da cui

$$\ln|y| = \ln\left|1 + p^2\right| + \ln C \quad y = C_1\left(1 + p^2\right)$$

ma $p = y'$, e quindi

$$y = C_1 + C_1 y'^2 \quad y'^2 = \frac{y}{C_1} - 1$$

risolviamo rispetto a y'

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y - C_1}{C_1}} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\sqrt{y - C_1}$$

passando agli integrali e risolvendo

$$\sqrt{C_1}\int \frac{dy}{\sqrt{y - C_1}} = \pm\int dx$$

cioè

$$2\sqrt{C_1}\sqrt{y - C_1} = \pm x + C_2$$

trovo C_1

$$1 = \pm\sqrt{\frac{1 - C_1}{C_1}} \quad \sqrt{C_1} = \sqrt{1 - C_1} \quad C_1 = \frac{1}{2}$$

trovo C_2

$$2\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \pm 1 + C_2 \quad 1 = 1 + C_2 \quad C_2 = 0$$

e la soluzione particolare è

$$y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Esercizio 101. Trovare la soluzione particolare di $yy" + y'^2 = y'^3$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$yp\frac{dp}{dy} = p^3 - p^2 \quad \frac{dp}{dy} = \frac{p^3 - p^2}{yp}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{p}{p^3 - p^2}dp \quad \ln|y| = \int \frac{dp}{p^2 - p}$$

risolviamo l'integrale sostituendo alla frazione la somma di due frazioni con numeratore da individuare

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p - 1} = \frac{1}{p(p - 1)}$$

moltiplicando e confrontando i termini di pari grado

$$Ap - A + Bp = 1 \quad p(A + B) - A = 1 =$$

da cui $A = -1$ e $B = 1$, per cui

$$\ln|y| = \int \frac{dp}{p} + \int \frac{dp}{p - 1} \quad \ln C_1|y| = \ln\left|\tfrac{p-1}{p}\right|$$

cioè

$$C_1 y = \tfrac{p-1}{p} \quad C_1 y = \frac{y' - 1}{y'}$$

cioè

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C_1 y}$$

da cui, separando le variabili

$$x = y - \frac{C_1}{2}y^2 + C_2$$

trovo C_1

$$C_1 = 0$$

trovo C_2

$$0 = 1 + C_2 \qquad C_2 = -1$$

e la soluzione particolare è

$$y = x + 1$$

Esercizio 102. Trovare la soluzione particolare di $y"y^3 = 1$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$p\frac{dp}{dy}y^3 = 1 \quad p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y3}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int pdp = \int y^{-3}dy$$

da cui

$$p^2 = -\frac{1}{y^2} + 2C_1$$

cioè

$$p = \pm\frac{\sqrt{2C_1y^2 - 1}}{y}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$\int dx = \pm\int \frac{ydy}{\sqrt{2C_1y^2 - 1}} = \pm\frac{1}{2C_1}\int \frac{2C_1ydy}{\sqrt{2C_1y^2 - 1}}$$

ma $D\left[\sqrt{2C_1y^2 - 1}\right] = \frac{2C_1y}{\sqrt{2C_1y^2 - 1}}$, per cui

$$x = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{2C_1y^2 - 1} + C_2$$

trovo C_1

$$1 = \pm\sqrt{2C_1 - 1} \quad C_1 = 1$$

trovo C_2

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 1} + C_2 \qquad C_2 = 1$$

e la soluzione particolare è

$$2y^2 - 4x^2 = 1$$

Esercizio 103. Trovare la soluzione particolare di $yy" + y^{'2} = 1$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y" = p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 1 \quad yp\frac{dp}{dy} = 1 - p^2$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{pdp}{1 - p^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2pdp}{1 - p^2} = \int \frac{dy}{y}$$

da cui

$$\ln\left|1 - p^2\right| = \ln\frac{C_1}{y^2}$$

cioè

$$p^2 = 1 - C_1y^{-2}$$

e

$$p = \pm\frac{\sqrt{y^2 - C_1}}{y}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$\int dx = \pm\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - C_1}}$$

ma $D\left[\sqrt{y^2-C_1}\right]=\frac{y}{\sqrt{y^2-C_1}}$, per cui

$$x=\pm\sqrt{y^2-C_1}+C_2$$

trovo C_1

$$1=\pm\sqrt{1-C_1}\quad C_1=0$$

trovo C_2

$$0=C_2-1\qquad C_2=1$$

e la soluzione particolare è

$$x=y+1$$

Esercizio 104. Trovare la soluzione particolare di $y"+y^{'2}+y'(y-1)=0$ con $y=2$, $y'=2$ per $x=0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y'=p$ e $y"=p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$p\frac{dp}{dy}-p^2+p(y-1)=0\quad \frac{dp}{dy}-p=-(y-1)$$

questa è un'equazione di Bernoulli con $\alpha=1$; introduciamo pertanto la sostituzione $p=uv$ e $p'=u'v+u'v$

$$u'v+u'v-uv-1+y=0$$

ricaviamo u raccogliendo i termini contenenti v

$$v(u'-u)+uv'-1+y=0$$

da cui

$$u'-u=0\quad u=e^y$$

e sostituendo

$$e^yv'+y-1=0$$

cioè

$$v'=\frac{dv}{dy}=\frac{1-y}{e^y}\quad v=\int\frac{1-y}{e^y}dy\quad=ye^{-y}$$

pertanto

$$p=uv=e^y\left(ye^{-y}\right)=y+C_1$$

ma $p=\frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$dx=\frac{dy}{y+C_1}\quad x=\ln(y+C_1)+C_2$$

trovo C_1

$$2=2+C_1\qquad C_1=0$$

trovo C_2

$$0=\ln 2+C_2\quad C_2=-\ln 2$$

e la soluzione particolare è

$$x=\ln y-\ln 2=\ln\frac{y}{2}$$

da cui

$$y=2e^x$$

Esercizio 105. Trovare la soluzione particolare di $y^2+y^{'2}-2yy"=0$ con $y=1$, $y'=1$ per $x=0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y'=p$ e $y"=p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$y^2+p^2-2yp\frac{dp}{dy}=0$$

introduciamo pertanto la sostituzione $p=uv$ e $p'=u'v+u'v$

$$y^2+u^2v^2-2yuv(u'v+u'v)=0$$

svolgendo e raccogliendo i termini contenenti v

$$v^2\left(u^2-2yuu'\right)++y^2-2yu^2vv'=0$$

da cui, ricavando u

$$2yuu'=u^2\quad 2y\frac{du}{dy}=u$$

separando le variabili

$$\ln|u| = \tfrac{1}{2}\ln|y| \quad u = \sqrt{y}$$

ora sostituendo questo valore di u, abbiamo

$$y^2 - 2y^2 vv' = 0 \quad vv' = \tfrac{1}{2} \quad v = \sqrt{y}$$

per cui

$$p = uv = \sqrt{y}\cdot\sqrt{y} \quad p = y + C_1$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$dx = \tfrac{dy}{y+C_1} \quad x = \ln|y + C_1| + C_2$$

trovo C_1

$$1 = 1 + C_1 \qquad C_1 = 0$$

trovo C_2

$$0 = \ln 1 + C_2 \quad C_2 = 0$$

e la soluzione particolare è

$$x = \ln y$$

o

$$y = e^x$$

Equazioni differenziali lineari

Esercizio 106. Trovare la soluzione particolare di $xy" + y^{'} = x^2$

Soluzione. L'equazione omogenea associata è $xy" + y^{'} = 0$; risolviamo tale equazione sostituendo $y' = x$ e $y" = p'$; avremo

$$xp' + p = 0 \quad x\tfrac{dp}{dx} = -p \quad \int \tfrac{dx}{x} = -\int \tfrac{dp}{d}$$

da cui

$$\ln|x| = \ln\left|\tfrac{C_1}{p}\right| \qquad p = \tfrac{C_1}{x}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$ per cui

$$y = C_1 \ln x + C_2$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea di tipo $y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + P_n(x)\,y = 0$ ha la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$

La soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea (come in questo esercizio) ha la forma $y = y_0 + Y$, dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Se è noto un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea, la soluzione generale dell'equazione non omogenea corrispondente può essere trovata dalla formula $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + ... + C_n(x)\,y_n$ dove le funzioni $C_i(x)$ sono definite dal sistema di equazioni

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1^{'}(x)\,y_1 + C_2^{'}(x)\,y_2 + ... + C_n^{'}(x)\,y_n & = & 0 \\ C_1^{'}(x)\,y_1^{'} + C_2^{'}(x)\,y_2^{'} + ... + C_n^{'}(x)\,y_n^{'} & = & 0 \\ .... & = & 0 \\ C_1^{'}(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2^{'}(x)\,y_2^{(n-1)} + ... + C_n^{(n-1)}(x)\,y_n^{'} & = & f(x) \end{array}\right.$$

(metodo delle costanti arbitrarie).

Applichiamo il metodo sopra indicato, dove $y_1 = \ln x$ e $y_2 = 1$; inoltre, l'equazione data si può riscrivere come

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1^{'}(x)\ln x + C_2^{'}(x)\cdot 1 & = & 0 \\ C_1^{'}(x)\,\frac{1}{x} + C_2^{'}(x)\cdot 0 & = & x \end{array}\right.$$

risolvendo si ha

$$\left\{\begin{array}{lcr} C_1^{'}(x) & = & x^2 \\ C_2^{'}(x) & = & -x^2\ln x \end{array}\right.$$

pertanto

$$C_1(x) = \int x^2 dx = \tfrac{x^3}{3} + A \quad C_2(x) = -\int x^2 \ln x dx = -\tfrac{x^3}{3}\ln x + \tfrac{x^3}{9} + B$$

con A e B costanti arbitrarie. La soluzione sarà

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 = \left(\frac{x^3}{3} + A\right)\ln x + \left(-\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + B\right) = \frac{x^3}{9} + A\ln x + B$$

Esercizio 107. Trovare la soluzione particolare di $xy" - xy^{'} = 3x^2$

Soluzione. L'equazione omogenea associata è $xy" - xy^{'} = 0$; risolviamo tale equazione

$$y" = y' \quad y = C_1 + C_2 \; e^x$$

per cui $y_1 = C_1 \cdot 1$ e $y_2 = C_2 e^x$

La soluzione sarà della forma $y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) e^x$; e l'equazione data si può scrivere come $y" - y' = 3x$

Applicando ancora il metodo delle costanti arbitrarie, avremo

$$\begin{cases} C_1^{'}(x) + C_2^{'}(x) e^x & = & 0 \\ C_1^{'}(x)(-1) + C_2^{'}(x) \cdot 0 & = & 3x \end{cases}$$

risolvendo si ha

$$\begin{cases} C_1^{'}(x) & = & -3x \\ C_2^{'}(x) & = & 3xe^{-x} \end{cases}$$

pertanto

$$C_1(x) = -\int 3x dx = -\tfrac{3x^2}{2} + A \quad C_2(x) = 3\int xe^x dx = -(x+1)e^{-x} + B$$

con A e B costanti arbitrarie. La soluzione sarà

$$y = -\frac{3x^2}{2} + A - (x+1)e^{-x} + Be^x =$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Esercizio 108. Trovare la soluzione generale dell'equazione $2y" - y' - y = 4xe^{2x}$

Soluzione. Questa equazione è del tipo $y" + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione con secondo membro nullo è $2y^{"} - y' - y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $2k^2 - k - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $k_2 = -\frac{1}{2}$ e $k_1 = 1$.

In questo caso la funzione $f(x)$ che caratterizza il secondo membro ha la forma di $e^{ax}P_n(x)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n. Nel nostro caso $a = 2$ e $n = 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi del tipo $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, essendo $(k_1 \neq k_2) \in \mathbb{R}$ e quindi

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$$

Le caratteristiche evidenziate della funzione al secondo membro, consentono di esprimere la soluzione particolare nella forma

$$Y = e^{2x}(Ax + B)$$

Deriviamo due volte

$$Y' = 2e^{2x}(Ax + B) + Ae^{2x} \quad Y" = 4e^{2x}(Ax + B) + 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e confrontiamo i termini in x con lo stesso grado e dividendo poi il tutto per e^{2x},avremo

$$5Ax + 7A + 5B = 4x$$

da cui

$$5A = 4 \quad 7A + 5B = 0$$

avremo

$$A = \tfrac{4}{5} \quad B = -\tfrac{28}{25}$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)$$

Esercizio 109. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 2y' + y = xe^x$

Soluzione. Questa equazione è ancora del tipo $y" + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y^{"} - 2y' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 1 = 0$, che essendo il quadrato di un binomio, ammette due radici uguali $K_1 = k_2 = 1$.

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = e^x (C_1 + C_2 x)$

In questo caso la funzione $f(x)$ che caratterizza il secondo membro ha la forma di $e^{ax} P_n(x)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n. Nel nostro caso $a = 1$ e $n = 1$. La soluzione particolare Y, questa volta, avendo l'equazione caratteristica una radice doppia, sarà del tipo $y = x^r e^{ax} Q_n(x) = x^2 e^x (Ax + B)$, dove $r = 2$, indica l'ordine della radice

Deriviamo due volte

$$Y' = 2xe^x (Ax + B) + x^2 e^x (Ax + B) + Ax^2 e^x$$

$$Y" = 4xe^x (Ax + B) + x^2 e^x (Ax + B) + 2e^x (Ax + B) + 2Ax^2 e^x + 4xe^x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e confrontiamo i termini in x con lo stesso grado e dividendo poi il tutto per e^{2x},avremo

$$6Ax + 4B = x$$

da cui

$$A = \tfrac{1}{6} \quad B = 0$$

e la soluzione sarà

$$y = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{6} x^3 e^x$$

Esercizio 110. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" + y = x \sin x$

Soluzione. Questa equazione è ancora del tipo $y" + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y^{"} + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 + 1 = 0$, che ammette solo radici complesse $K = \pm 1$ (Un numero complesso può essere rappresentato da $k = \alpha \pm i\beta$, nel nostro caso quindi $\alpha = 0$ e $\beta = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$f(x) = x \sin x$, cioè della forma $e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$. Nel nostro caso $a = 0$ e $b = 1$, $P_n(x) = 0$ e $Q_m(x) = x$, quindi $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$ e la soluzione particolar è del tipo

$$Y = x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$$

Deriviamo due volte

$$Y' = 2Ax \cos x - Ax^2 \sin x + B \cos x - Bx \sin x + 2Cx \sin x + Cx^2 \cos x + D \sin x + Dx \cos x$$

$$Y" = -Ax^2 \cos x - Cx^2 \sin x - 4Ax \sin x - Bx \cos x + 4Cx \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2D \cos x - Dx \sin x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data

$$-4Ax \sin x + 4Cx \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2D \cos x = x \sin x$$

e confrontando i termini in $x \cos x, x \sin x, \cos x, \sin x$, avremo

$$A = -\tfrac{1}{4} \quad B = 0 \quad D = \tfrac{1}{4} \quad B = 0$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4} x^2 \cos x + \frac{1}{4} x \sin x$$

Esercizio 111. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 5y' + 6y = 0$

Soluzione. Questa equazione è omogenea e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 5k + 6 = 0$, che ammette le radici $k_1 = 2$ e $k_2 = 3$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$per cui

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Esercizio 112. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 2y' + 2y = 0$

Soluzione. Questa equazione è omogenea e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 2 = 0$, che ammette radici complesse $k_1 = 1 - i$ e $k_2 = 1 + i$, per cui $\alpha = 1$ e $\beta = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$ per cui

$$y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$$

Esercizio 113. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$\frac{y' - y}{y"} = 3$$

Soluzione. Questa equazione si può riscrivere come

$$3y" - y' + y = 0$$

e risulta quindi omogenea; la sua equazione caratteristica è $3k^2 - k + 1 = 0$, che ammette radici complesse

$$k_1 = \tfrac{1-\sqrt{11}}{6} \quad k_2 = \tfrac{1+\sqrt{11}}{6}$$

per cui $\alpha = \frac{1}{6}$ e $\beta = \frac{\sqrt{11}}{6}$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$ per cui

$$y = e^{\frac{x}{6}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{6} x\right)$$

Esercizio 114. Trovare la soluzione particolare dell'equazione $y" - 5y' + 4y = 0$ quando per $x = 0$, si ha $y = 5$ e $y' = 8$

Soluzione. Questa equazione è omogenea; la sua equazione caratteristica è $k^2 - 5k + 4 = 0$, che ammette le soluzioni

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 4$$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

calcoliamo la derivata prima di tale soluzione

$$y' = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$$

per cui

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 + 4C_2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

e la soluzione particolare è

$$y = 4e^x + e^{4x}$$

Esercizio 115. Trovare la soluzione particolare dell'equazione $y" + 4y = 0$ quando per $x = 0$, si ha $y = 0$ e $y' = 2$

Soluzione. Questa equazione è omogenea; la sua equazione caratteristica è $k^2 + 4 = 0$, che ammette come soluzioni $k = \pm 2i$, ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$)

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

calcoliamo la derivata prima di tale soluzione

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$$

per cui

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 1$$

e la soluzione particolare è

$$y = \sin 2x$$

Esercizio 116. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 4y = x^2 e^{2x}$

Soluzione. Questa equazione è ancora del tipo $y" + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y^{"} - 4y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 4 = 0$, che ammette le due soluzioni $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$

$f(x) = x^2e^{2x}$, cioè della forma $x^re^{ax}Q_n(x)$. Nel nostro caso $a = 2$ e $r = 1$, e la soluzione particolar è del tipo

$$Y = xe^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

Deriviamo due volte

$$Y' = e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 2xe^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + xe^{2x}(2Ax + B)$$

$$\begin{aligned} Y" = \; & 2e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 4xe^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) \\ & +2xe^{2x}(2Ax + B) + e^{2x}(2Ax + B) + 2xe^{2x}(2Ax + B) + 2Axe^{2x} \end{aligned}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data, dividendo tutto per e^{2x}

$$4Ax^2 + 4Bx + 4C - 8Ax^2 + +4Bx + 2A + B + 2A = x^2$$

cioè

$$-4Ax^2 + 8Bx + 4A + B + 4C = x^2$$

da cui

$$A = -\tfrac{1}{4} \quad B = 0 \quad C = \tfrac{1}{4}$$

e la soluzione sarà

$$y = xe^{2x}\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

Esercizio 117. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

Soluzione. Questa equazione è del tipo $y" + y' + y = f_1(x) + f_2(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y_1 + Y_2$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e $Y_1 + Y_2$ la soma delle soluzioni particolari dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y^{"} - 4y' + 4y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 4k + 4 = 0$, che ammette la radice doppia $k = 2$.

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = e^{2x}(C_1 + C_2x)$

troviamo Y_1 per $f_1(x) = \sin x$, cioè della forma $e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$. Nel nostro caso $a = 0$ e $b = 2$, $P_n(x) = A$ e $Q_m(x) = B$, quindi $Y_1 = A\cos 2x + B\sin 2x$

troviamo ora Y_2 per $f_2(x)e^{2x}$; sarà $Y_2 = Cx^2e^{2x}$; pertanto

$$Y = Y_1 + Y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx^2e^{2x}$$

Deriviamo due volte

$$Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + 2Cxe^{2x} + 2Cx^2e^{2x}$$

$$Y" = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2Ce^{2x} + 8Cxe^{2x} + 4Cx^2e^{2x}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x + 2Ce^{2x} = \sin 2x + e^{2x}$$

e confrontando i termini in $\cos 2x, \sin 2x, e^{2x}$, avremo

$$A = \tfrac{1}{8} \quad B = 0 \quad C = \tfrac{1}{2}$$

e la soluzione sarà

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

Esercizio 118. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - y' + y = x^3 + 6$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y^{"} - y' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - k + 1 = 0$, che ammette le due soluzioni complesse $k_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ e $k_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y_0 = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$f(x) = x^3 + 6$, cioè della forma $e^{ax} Q_n(x)$ con $a = 0$. La soluzione particolare è del tipo

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Deriviamo due volte

$$Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$Y" = 6Ax + 2B$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data

$$Ax^3 + x^2 (B - 3A) + x(6A - 2B + C) + 2B + C + D = x^3 + 6$$

cioè

$$A = 1 \quad B - 3A = 0 \quad 6A - 2B + C = 0 \quad 2B + C + D = 6$$

da cui

$$A = 1 \quad B = 3 \quad C = D = 0$$

e la soluzione sarà

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x^3 + 3x^2$$

Esercizio 119. Trovare la soluzione particolare dell'equazione $y" + 2y' + y = e^{2x}$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $k^2 + 2k + 1 = 0$, che ammette due soluzioni coincidenti $k_{1,2} = -1$,

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y_0 = e^{-x} (C_1 + C_2 x)$$

ora $f(x) = e^{2x}$ e quindi

$$Y = e^{ax} P_n(x) = Ae^{2x}$$

calcoliamo la derivata prima e seconda

$$Y' = 2Ae^{2x} \quad y" = 4Ae^{2x}$$

sostituisco nell'equazione data

$$9Ae^{2x} = e^{2x}$$

da cui

$$A = \frac{1}{9}$$

e la soluzione è

$$y = e^{-x} (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{9} e^{2x}$$

Esercizio 120. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" + y' - 2y = 8 \sin 2x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y^{"} + y' - 2y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 + k - 2 = 0$, che ammette le radici $k_1 = -2$ e $k_2 = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

troviamo Y che sarà della forma $e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$. Nel nostro caso $a = 0$ e $b = 2$, $P_n(x) = A$ e $Q_m(x) = B$, quindi $Y = A \cos 2x + B \sin 2x$

Deriviamo due volte

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$
$$Y" = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$(-2A - 6B) \sin 2x + (-6A + 2B) \cos 2x = 8 \sin 2x$$

e confrontando i termini in $\cos 2x, \sin 2x$, avremo

$$A = -\tfrac{2}{5} \quad B = -\tfrac{6}{5}$$

e la soluzione sarà
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x$$

Esercizio 121. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 7y' + 12y = -e^{4x}$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y^{"} - 7y' + 12y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 7k + 12 = 0$, che ammette le radici $k_1 = 3$ e $k_2 = 4$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

troviamo Y che sarà della forma $e^{ax} P_n(x)$. Nel nostro caso $a = 4$, $P_n(x) = Ax$, quindi $Y = xAe^{4x}$

Deriviamo due volte
$$Y' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x}$$
$$Y" = 4Ae^{4x} + 4Ae^{4x} + 16Axe^{4x}$$
sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo, dividendo tutto per e^{4x}
$$8A + 16Ax - 7A - 28Ax + 12Ax = -1$$
e confrontando i termini simili
$$A = -1$$
e la soluzione sarà
$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - xe^{4x}$$

Esercizio 122. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 2y' + y = 2e^x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y^{"} - 2y' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 1 = 0$, che ammette due radici coincidenti $k = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = e^x (C_1 + C_2 x)$

una soluzione particolare sarà $Y = Ax^2 e^x$

Deriviamo due volte
$$Y' = 2Axe^x + Ax^2 e^x$$
$$Y" = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x$$
sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo, dividendo tutto per e^x
$$2A + 4Ax + Ax^2 - 4Ax - 2Ax^2 + Ax^2 = 2$$
e confrontando i termini simili
$$A = 1$$
e la soluzione sarà
$$y = e^x (C_1 + C_2 e^x) + x^2 e^x$$

Esercizio 123. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y" - 2y' - 8y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k - 8 = 0$, che ammette le radici $k_1 = -2$ e $k_2 = 4$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$

troviamo Y_1 per $f_1(x) = e^x$, cioè della forma $Y_1 = Ae^x$

deriviamo due volte
$$Y_1^{'} = Ae^x \quad Y_1^{"} = Ae^x$$
sostituendo e uguagliando a e^x, avremo $A = -\frac{1}{9}$

troviamo ora Y_2 per $f_2(x) = -8\cos 2x$; sarà $Y_2 = B\cos 2x + C\sin 2x$;

Deriviamo due volte
$$Y' = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x$$
$$Y" = -4B\cos 2x - 4C\sin 2x$$
sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo
$$\cos 2x(-12B - 4C) + \sin 2x(12C + 4B) = -8\cos 2x$$
e confrontando i termini in $\cos 2x, \sin 2x$, avremo
$$B = \tfrac{3}{5} \quad C = \tfrac{1}{5}$$
e la soluzione sarà
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{9}e^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x$$

Esercizio 124. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y" - 2y' + 5y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 5 = 0$, che ammette le radici $k_1 = 1 - 2i$ e $k_2 = 1 + 2i$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
troviamo Y per $f(x) = e \cos 2x^x$, cioè $Y = e^x [Ax \cos 2x + Bx \sin 2x]$
deriviamo due volte

$$Y' = e^x [Ax \cos 2x + Bx \sin 2x] + e^x [A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x]$$

$$\begin{aligned} Y" = & \ e^x [Ax \cos 2x + Bx \sin 2x] + 2e^x [A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x] + \\ & + e^x [-4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x + 4B \cos 2x + 4Bx \sin 2x] \end{aligned}$$

sostituendo e dividendo per e^x, avremo

$$(4B) \cos 2x + (-4A) \sin 2x = \cos 2x$$

da cui $B = \frac{1}{4}$ e $A = 0$
e la soluzione sarà

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} x e^x \sin 2x$$

Esercizio 125. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" + y' = 2e^x + 5x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y" + y' = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 + k = 0$, che ammette le radici $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2$
troviamo Y_1 per $f_1(x) = 2e^x$, cioè della forma $Y_1 = Ae^x$
deriviamo due volte

$$Y_1' = Ae^x \quad Y_1" = Ae^x$$

sostituendo e uguagliando a e^x, avremo $A = 1$ e quindi $Y_1 = e^x$
troviamo ora Y_2 per $f_2(x) = 5x$; sarà $Y_2 = x(Ax + B)$;
Deriviamo due volte

$$Y' = 2Ax + B$$
$$Y" = 2A$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$2A + 2Ax + B = 5x$$

e confrontando i termini simili, avremo

$$A = \tfrac{5}{2} \quad B = -5$$

con $Y_2 = \frac{5}{2}x^2 - 5x$ e la soluzione generale sarà

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$$

Esercizio 126. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y" - y = 2x \sin x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y" - y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 1 = 0$, che ammette le radici $k_1 = -1$ e $k_2 = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$
troviamo Y per $f(x) = 2x \sin x$, della forma $Y = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$
deriviamo due volte

$$Y' = (A + Cx + D) \cos x + (C - Ax - B) \sin x$$
$$Y" = C \cos x - (A + Cx + D) \sin x - A \sin x + (C - Ax - B) \cos x$$

sostituendo

$$(-2A - 2D) \sin x - 2Cx \sin x + (2C - 2B) \cos x - 2Ax \cos x = 2x \sin x$$

e uguagliando i termini con $\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x$, avremo $A = 0$ $B = -1$, $C = -1$, $D = 0$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \cos x - x \sin x$$

Esercizio 127. Due carichi uguali sono sospesi all'estremità di una molla. Trovare l'equazione del moto descritto da uno di questi carichi se l'altro si stacca dalla molla.

Soluzione. Introduciamo le seguenti condizioni: allungamento della molla sotto l'azione di uno dei carichi a riposo uguale ad a e massa del carico m. Se x è la coordinata del carico misurata lungo la verticale a partire dalla posizione di equilibrio in presenza di un carico, si ha

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \frac{mg}{a}(x+a)$$

riscriviamo l'equazione in una forma più sintetica

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x$$

che possiamo riscrivere ancora con le notazioni finora utilizzate

$$x''(t) + \frac{g}{a}x = 0$$

Equazione omogenea di tipo $k^2 = -\frac{g}{a}$, le cui soluzioni sono $k_1 = -\sqrt{\frac{g}{a}}$ e $k_2 = \sqrt{\frac{g}{a}}$

La soluzione sarà

$$x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = -C_1\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + C_2\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

se le condizioni iniziali sono $x_0 = a$ e $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 = 0$, si ottiene $C_1 = a$ e $C_2 = 0$, si ha

$$x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}x$$

5. Equazioni a coefficienti costanti di grado superiore al secondo

Esercizio 128. Trova la soluzione generale della seguente equazione $y''' - 13y'' + 12y' = 0$

Soluzione. L'equazione è omogenea e come per il caso delle equazioni di grado due

$$k\left(k^2 - 13k + 12k\right) = 0 \quad k_1 = 0 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 12$$

per cui la soluzione generale, sulla falsariga delle equazioni di secondo grado

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}$$

Esercizio 129. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^4 - 2k^3 + k^2 = 0$, che ammette le radici doppie $k_{1,2} = 0$ e $k_{3,4} = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x$

$f(x) = x^3$ per cui Y è della forma $Y = x^2\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)$

deriviamo quattro volte

$$Y' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx \quad Y'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D$$

$$Y''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C \quad y^{IV} = 120Ax + 24B$$

sostituendo e raggruppando secondo le potenze di x, si ha

$$x^3(20A) + x^2(-120A + 12B) + x(120A - 48B + 6C) + (24B - 12C + 2D) = x^3$$

e confrontando i termini simili, avremo $A = \frac{1}{20}$ $B = \frac{1}{2}$, $C = 3$, $D = 12$ e la soluzione generale sarà

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2$$